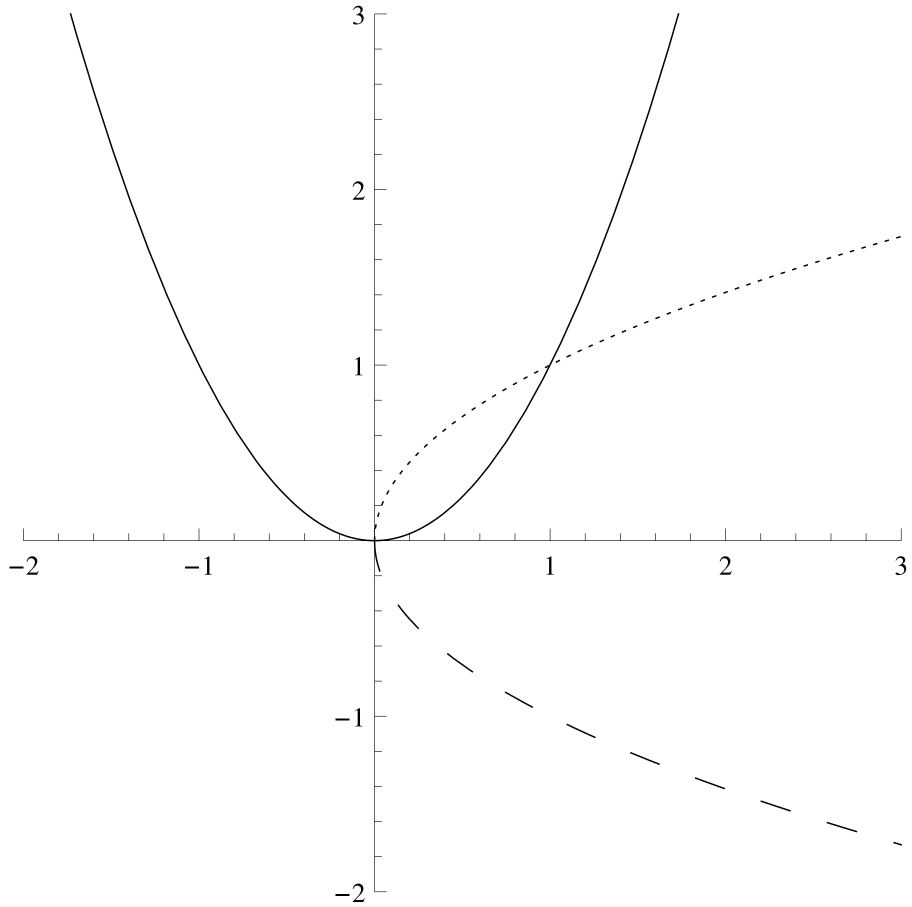
Förberedande kurs i matematik

Alexanderson, Bergkvist, Leander, Lundqvist, Ottergren



Förord

Detta material är avsett att introducera matematik för nya universitets- och högskolestudenter och är skrivet som kurslitteratur till Förberedande kurs i matematik, som är en distanskurs utvecklad av Stockholms universitet. Kursen riktar sig till nya studenter i ämnet samt till de som vill få en djupare bild av matematiken. Materialet repeterar till viss del grundläggande gymnasiematematik på universitetsvis, men tar också upp en hel del nya saker som vi tror att läsaren kommer att ha stor nytta av vid kommande matematikstudier vid universitet eller högskola. Läsaren förutsätts ha kunskaper i ämnet minst motsvarandes gymnasiets Matematik C eller Matematik 3b/3c.

Materialet är organiserat i tre kapitel. Vart och ett av dessa tre kapitel är indelade i mindre avsnitt. Efter de flesta delavsnitt finns övningar som läsaren med fördel kan göra för att kontrollera att han eller hon förstått de olika begreppen och metoderna från avsnittet. Alla övningar är tänkta att göras utan hjälp av miniräknare eller dator.

Kapitel 1 består till stor del av en presentation av olika tal, samt regler för hur man räknar med dessa. Kapitlet utgår från de positiva heltalen och motiverar en rad utvidgningar för att till slut komma fram till de komplexa talen.

I kapitel 2 behandlas algebra och kombinatorik. Kapitlet avslutas med en diskussion av några logiska symboler.

I kapitel 3 introduceras mängdlära. Med hjälp av mängdlära definierar vi funktionsbegreppet och går sedan igenom de vanligaste funktionerna. Vi använder därefter teorin från gränsvärden för att definiera derivata. Vi definierar slutligen begreppet integral som ett gränsvärde av över- och undersummor. Kapitlet behandlar även olikheter, absolutbelopp och trigonometri.

Detta är den sjätte upplagan av kursmaterialet och är till innehållet i princip identisk med den femte upplagan bortsett från att en del tryckfel har rättats.

Stockholm, juni 2020
Författarna

Sjätte upplagan

Innehåll

Symboler

$\mathbb{N}$	de naturliga talen
$\mathbb{Z}$	heltalen
$\mathbb{Q}$	de rationella talen
$\mathbb{R}$	de reella talen
$\mathbb{C}$	de komplexa talen
$<$	mindre än
$\leq$	mindre än eller lika med
$>$	större än
$\geq$	större än eller lika med
$!$	fakultet
$\sum$	summa
$\binom{n}{k}$	binomialkoefficient, läses ”n över k”
$\subset$	delmängd till, om $A \subset B$ så är A en delmängd till B
$\cup$	union
$\cap$	snitt
$\in$	tillhör
$\notin$	tillhör ej
$\Rightarrow, \Leftarrow$	implicerar
$\Leftrightarrow$	är ekvivalent med
$\wedge$	och
$\vee$	eller
VL	vänstra ledet
HL	högra ledet

1 Tal

Det första kapitlet handlar om räkning med olika typer av tal.

1.1 De positiva heltalen och de naturliga talen

Vi börjar med de tal man stöter på dagligen, nämligen *positiva heltal*. Det är tal som räknar hela antal. Mängden av de positiva heltalen betecknas $\mathbb{Z}_+$ och

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Med de positiva heltalen saknar vi möjlighet att uttrycka ”ingenting”. Därför inför vi de *naturliga talen* som är de positiva heltalen inklusive talet noll[1]. Vi betecknar de naturliga talen med symbolen $\mathbb{N}$ och

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Det är bara nollan som skiljer $\mathbb{N}$ från $\mathbb{Z}_+$. Eftersom alla tal som finns i $\mathbb{Z}_+$ också finns i $\mathbb{N}$ så är $\mathbb{Z}_+$ en *delmängd* av $\mathbb{N}$, vilket vi skriver som

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}.$$

Vad är det egentligen vi gör när vi adderar två naturliga tal? Varför är till exempel $4 + 1 = 5$? Svaret är att vi har *definierat* att addition med 1 ger nästa tal i uppräkningen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Betraktar vi talen som utplacerade på en linje kan vi tänka oss addition med 1 som att gå ett steg till höger på den linjen. Att $4 + 4 = 8$ beror på att när vi flyttar oss fyra steg till höger från 4 så kommer vi att hamna på 8.

Eftersom vi hela tiden rör oss till höger på linjen när vi adderar naturliga tal så kommer vi alltid att få ett nytt naturligt tal. Vi säger att de naturliga talen är *slutna* under addition.

Multiplikation betraktar vi som upprepad addition:

$$a \cdot b = \underbrace{a + \cdots + a}_{b \text{ stycken}}.$$

Vi har visat att de naturliga talen är slutna under addition och eftersom multiplikation är upprepad addition så följer det att de naturliga talen är slutna även under multiplikation.

När vi subtraherar ett naturligt tal från ett annat rör vi oss till vänster på tallinjen. Om vi ska räkna ut $4 - 5$ så startar vi på position fyra och rör oss fem steg åt vänster. Men de naturliga talen ”slutar” vid noll. De naturliga talen är alltså *inte* slutna under subtraktion. Så vi utvidgar de naturliga talen till *heltalen* .

1.2 Heltalen

Med de hela talen menas mängden

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

och denna betecknas $\mathbb{Z}$ (från tyskans ”Zahlen”). Det gäller alltså att

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Med de hela talen löser vi problemet med subtraktionen $4 - 5$ eftersom vi nu kan röra oss till vänster om noll.

Subtraktion med ett negativt tal $-a$ definierar vi som att gå a steg till höger på tallinjen. Uttrycket $5 - (-3)$ är således lika med $5 + 3$. När vi subtraherar ett heltal från ett annat heltal får vi ett nytt heltal. De hela talen är alltså slutna under subtraktion.

Följande lagar gäller för addition av heltal.

[1] Notationen är inte helt vedertagen och i vissa sammanhang avser man med de naturliga talen endast de positiva heltalen.

$a + b = b + a$	Kommutativa lagen för addition
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Associativa lagen för addition
$-(-a) = a$	Negeringslagen

På grund av den associativa lagen är det helt okej att skriva $a + b + c$ helt utan parentes, eftersom det inte spelar någon roll om vi först lägger ihop a och b eller b och c.

Exempel 1.1. $(5 + 4 - 3) + 2 = 5 + (4 - 3 + 2)$ *enligt den associativa lagen.*

Exempel 1.2. $4 - (-4) = 4 + 4 = 8$ *enligt negeringslagen.*

Vi har sett att multiplikation av positiva heltal är en upprepad addition. På analogt vis kan vi exempelvis tolka $(-4) \cdot 5$ som $-4 - 4 - 4 - 4 - 4 = -20$.

Följande lagar gäller för multiplikation av heltal.

$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Associativa lagen för multiplikation
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributiva lagen

Den distributiva lagen behärskas vanligtvis bra från vänster till höger, men det är viktigt att även kunna gå från höger till vänster, det vill säga att skriva om uttryck på formen $a \cdot b + a \cdot c$ som $a \cdot (b + c)$.

Den distributiva lagen gäller även för fler element enligt exemplen nedan.

Exempel 1.3.

$$a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Exempel 1.4.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Vi ska nu bestämma vad produkten av två negativa tal är. Vi har att

$$0 = -a \cdot 0 = (-a) \cdot 0 = (-a) \cdot (b - b).$$

Genom att utnyttja den distributiva lagen får vi

$$(-a) \cdot (b - b) = (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b),$$

det vill säga

$$0 = (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b).$$

Vi adderar $a \cdot b$ till båda led och får

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b).$$

Produkten av två negativa tal är alltså lika med produkten av deras ”positiva motsvarigheter”.

1.2.1 Potenser

För att lättare hantera uttryck av typen $x \cdot x \cdot x$ har man infört *potenser*. Vi skriver

$$x \cdot x \cdot x = x^3,$$

där x är potensens *bas* och 3 är potensens *exponent* .

Potenser är ett kompakt skrivsätt och vi kan till exempel på ett mycket litet utrymme ge en övre gräns för antalet elementarpartiklar i hela universum enligt modern fysik, nämligen 2^{300}.

Kuriosa 1. *Det finns en sägen som säger att när uppfinnaren av det schackliknande spelet Shaturanja visade upp spelet för kungen av Indien blev denne så imponerad att han ville ge uppfinnaren en belöning. Uppfinnaren sa då att han önskade sig ett vetekorn för den första rutan på schackbrädet, två vetekorn för den andra rutan, fyra vetekorn för den tredje, åtta vetekorn för den fjärde, och så vidare. Kungen tyckte att detta lät som en rimlig belöning och beviljade uppfinnarens önskning. Han insåg inte att summan* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63}$ *med råge översteg samtliga vetekorn i hela världen.*

Vi kan notera att

$$x^3 \cdot x^4 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = \underbrace{x \cdots x}_{\text{sju gånger}} = x^7$$

och att

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6 = x^{3 \cdot 2}.$$

Allmänt gäller följande räkneregler:

$$\boxed{\begin{matrix} x^a \cdot x^b = x^{a+b} \\ (x^a)^b = x^{a \cdot b} \end{matrix}}$$

Exempel 1.5. $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$

Exempel 1.6. $(2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$

Exempel 1.7. $9^2 \cdot 3^5 = (3^2)^2 \cdot 3^5 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

Exempel 1.8. $(-1)^4 = ((-1)^2)^2 = 1^2 = 1$

1.2.2 Prioritetsreglerna

Att uttrycket $3+3 \cdot 4$ är lika med 15 och inte 24 ser nog många som självklart. Men anledningen till detta är endast konventionell. Vi har bestämt att multiplikation och division har högre *prioritet* än addition och subtraktion. Om det motsatta hade gällt så hade $3 + 3 \cdot 4$ varit lika med $6 \cdot 4 = 24$. Prioritetsreglerna är följande:

1. Beräkna parenteser.

2. Beräkna potenser.

3. Beräkna multiplikation och division.

4. Beräkna addition och subtraktion.

Exempel 1.9. *Förenkla uttrycket* $(-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5)$.

Lösningsförslag: Vi använder prioritetsreglerna och får

$$\begin{aligned}(-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot ((4 - 8)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot ((-4)^2 - 5) &= -1 + 3 \cdot (16 - 5) \\ &= -1 + 3 \cdot 11 = -1 + 33 = 32.\end{aligned}$$

★

1.2.3 Heltalsdivision

När man delar ett heltal med ett annat blir resultatet inte alltid ett heltal. Till exempel går divisionen 17/5 inte jämt ut. Men genom att införa begreppen *kvot* och *rest* kan man studera så kallad heltalsdivision. Kvoten vid heltalsdivision av två positiva heltal a och b anger det maximal antalet gånger vi kan dra b från a och fortfarande få någonting icke-negativt kvar. Det vi får kvar är resten.

Exempel 1.10. *Beräkna kvoten och resten då 17 delas med 5.*

Lösningsförslag: Kvoten är det maximala antalet gånger som vi kan dra bort 5 från 17 och fortfarande få någonting icke-negativt kvar. Eftersom $3 \cdot 5 = 15$ men $4 \cdot 5 = 20$ så blir kvoten 3. Vi har att $17 = 3 \cdot 5 + 2$, alltså är resten lika med 2. ★

Mer formellt söker vi alltså kvoten k och resten r så att $a = kb + r$, där $0 \leq r < b$.

Exempel 1.11. *Beräkna kvoten och resten då* 106 *delas med* 21.

Lösningsförslag: Vi har $106 = 5 \cdot 21 + 1$, alltså är kvoten k lika med 5 och resten r lika med 1. ★

Exempel 1.12. *Beräkna kvoten och resten då* 20 *delas med* 4.

Lösningsförslag: Vi har $20 = 4 \cdot 5 + 0$, alltså är kvoten k lika med 5 och resten r lika med 0. ★

När resten är lika med noll vid heltalsdivision av a med b så betyder det att divisionen går jämt ut. Vi säger att b är en *delare* till a.

1.2.4 Jämna och udda tal

Du har säkert lagt märke till att summan av två jämna heltal blir ett nytt jämnt heltal, likaså att summan av två udda heltal blir ett jämnt heltal och att summan av ett jämnt och ett udda heltal udda.

Vi ska nu *bevisa* att det är så. Eventuellt är det här första gången som du möter ett strikt matematiskt bevis. Att följa resonemanget nedan är nyttigt för den matematiska mognaden, men det är inte nödvändigt för att kunna förstå det övriga materialet i kompendiet.

Vi börjar med två definitioner.

Definition 1. *Ett heltal är jämnt om det är delbart med två, det vill säga om det kan skrivas på formen $2a$, för något heltal a.*

Definition 2. *Ett heltal är udda om det lämnar rest ett vid division med två, det vill säga om det kan skrivas på formen $2a + 1$ för något heltal a.*

Vi kan nu formulera och bevisa våra utsagor.

Sats 1. *Summan av två jämna heltal är ett jämnt heltal.*

Bevis 1. *Eftersom talen är jämna kan det första skrivas som $2a_1$ och det andra skrivas som $2a_2$, där a_1 och a_2 är heltal. Vi får summan*

$$2a_1 + 2a_2 = 2(a_1 + a_2),$$

vilket är ett jämnt tal enligt definition. Alltså är summan av två jämna heltal ett jämnt heltal.

Sats 2. *Summan av två udda heltal är ett jämnt heltal.*

Bevis 2. *Eftersom talen är udda kan det första skrivas som* $2a_1 + 1$ *och det andra skrivas som* $2a_2 + 1$*, där* a_1 *och* a_2 *är heltal. Vi får summan*

$$2a_1 + 1 + 2a_2 + 1 = 2a_1 + 2a_2 + 2 = 2(a_1 + a_2 + 1),$$

vilket är jämnt tal. Alltså är summan av två udda heltal ett jämnt heltal.

Sats 3. *Summan av ett udda och ett jämnt heltal är ett udda heltal.*

Bevis 3. *Det udda talet kan skrivas som* $2a_1 + 1$ *och det jämna kan skrivas som* $2a_2$*, där* a_1 *och* a_2 *är heltal. Vi får summan*

$$2a_1 + 1 + 2a_2 = 2(a_1 + a_2) + 1,$$

vilket är udda tal. Alltså är summan av ett udda och ett jämnt heltal är ett udda heltal.

Det finns motsvarande satser för multiplikation och vi väljer att bevisa en och lämnar övriga två som övningar.

Sats 4. *Produkten av ett udda och ett jämnt heltal är ett jämnt heltal.*

Bevis 4. *Det udda talet kan skrivas som* $2a_1 + 1$ *och det jämna kan skrivas som* $2a_2$*, där* a_1 *och* a_2 *är heltal. Vi får produkten*

$$(2a_1 + 1)2a_2 = 2((2a_1 + 1)a_2),$$

vilket är jämnt tal. Alltså är produkten av ett udda och ett jämnt heltal är ett jämnt heltal.

Övningar

1. Beräkna $1 - (5 - 4)$.
2. Beräkna $(-1)^3$.
3. Beräkna $(-1)^{12}$.
4. Förenkla $-(a - b - (a + b)) + (a + b)$.
5. Förenkla $(a + b)(c + d) - c(a + b)$.
6. Visa att $(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$.
7. Ge ett exempel på när $(x^a)^b = x^{(a^b)}$ och ett exempel på när $(x^a)^b \neq x^{(a^b)}$.
8. Beräkna kvoten k och resten r då 107 delas med 7.
9. Vad blir resten då 293 delas med 17?
10. Bevisa att produkten av två jämna heltal är ett jämnt heltal.
11. Bevisa att produkten av två udda heltal är ett udda heltal.

1.3 Primtal

Antag att vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad addition. De fem första talen som vi kan bilda är

$$3+3=6, \quad 3+5=8, \quad 3+3+3=9, \quad 5+5=10 \quad \text{och} \quad 3+3+5=11.$$

Om vi istället utgår från talet 1 så kan vi bilda $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$, det vill säga alla positiva heltal. Talet 1 fungerar alltså så att hela $\mathbb{Z}_+$ kan bildas från det med hjälp av upprepad addition.

Låt oss betrakta motsvarande situation för multiplikation. Vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad multiplikation. De två första talen som vi kan bilda är

$$3 \cdot 3 = 9 \quad \text{och} \quad 3 \cdot 5 = 15.$$

Hur ska vi bära oss åt om vi vill kunna skapa alla naturliga tal på det här sättet? Låt oss lägga till talet 2. Vi kan nu även bilda

$$2\cdot 2=4, \quad 2\cdot 3=6, \quad 2\cdot 2\cdot 2=8, \quad 2\cdot 5=10, \quad 2\cdot 2\cdot 3=12 \quad \text{och} \quad 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16.$$

Sammantaget har vi fått

$$\{2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,\ldots\}.$$

Mängden blir tätare, men vi saknar till exempel talet 7. När vi lägger till detta tal så kan vi även bilda 14 och vi får

$$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,\ldots\}.$$

Vi kan fortsätta och lägga till 11 och sedan 13, men då kommer vi upptäcka att vi saknar talet 17. Talen $2,3,5,7,11,13,17$ som vi utgått från är de sju första *primtalen* . Varje naturligt tal större än ett kan bildas genom upprepad multiplikation av primtal.

Vi behöver förstås en mer precis beskrivning av vad som menas med ett primtal. För att göra det ska vi först berätta vad ett *sammansatt* heltal är.

Ett positivt heltal $a > 1$ är sammansatt om det kan skrivas som en produkt av två heltal b och c som är större än ett, det vill säga $a = b \cdot c$, där $b > 1$ och $c > 1$.

Exempel 1.13. *Talen* $4,6,8,9$ *är sammansatta eftersom*

$$4 = 2\cdot 2, \quad 6 = 2\cdot 3, \quad 8 = 2\cdot 4 \quad \textit{och} \quad 9 = 3\cdot 3,$$

medan talen $2,3,5,7$ *är primtal eftersom dessa inte kan skrivas som en produkt av mindre postiva heltal.*

Nu kan vi definiera begreppet primtal.

Definition 3. *Ett positivt heltal som är större än ett och som* inte *är sammansatt kallas för* primtal.

Kuriosa 2. *Det finns oändligt många primtal. Detta brukar man bevisa genom ett så kallat* motsägelsebevis. *Man antar att det bara finns ändligt många primtal och visar att detta leder till en motsägelse, varpå man drar slutsatsen att antalet primtal är oändligt.*

Följande är exempel på kända primtal.

2	Det enda jämna primtalet. Varför?
65537	Det största (hittills) så kallade Fermatprimtalet (Googla för definition).
1111111111111111111	Det näst minsta primtalet som skrivs med bara ettor.

Lägg märke till att begreppet sammansatt tal är nära knutet till begreppet delbarhet från förra kapitlet, nämligen att ett heltal b är en *delare* till ett heltal a om $a = b \cdot c$ för något heltal c. En synonym till *delare* är *faktor*.

Vi är i huvudsak intresserade av *positiva delare* till *positiva heltal*.

Exempel 1.14. *Talet* 6 *har de positiva delarna* $1, 2, 3, 6$. *Talet* 7 *har de positiva delarna* 1 *och* 7. *Talet* 8 *har de positiva delarna* $1, 2, 4, 8$.

Kuriosa 3. *Ett tal a kallas* perfekt *om summan av de positiva delarna är lika med* $2a$. *Till exempel är* 6 *ett perfekt tal eftersom* $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$. *Hur många perfekta tal som finns är en öppen fråga. Kan du hitta något annat perfekt tal än sex? Tips: Det finns ett som är mindre än* 30.

Med hjälp av definitionen av delare så kan vi definiera sammansatta tal och primtal på ett annat sätt. Ett positivt heltal som är större än ett är sammansatt om det har fler än två positiva delare. Ett positivt heltal som endast har två positiva delare, sig själv och ett, kallas för ett primtal.

Ibland talar man även om *äkta delare*. Man säger att b är en äkta delare till a om b är en positiv delare till a och b är skilt från både ett och a. Ett primtal är alltså ett tal som saknar äkta delare.

Primtalsfaktorisering

Betrakta talet 520. Eftersom talet är jämnt så är det delbart med två och vi kan skriva

$$520 = 2 \cdot 260.$$

Även 260 är delbart med två och vi skriver

$$260 = 2 \cdot 130.$$

Återigen, 130 är jämt och vi får

$$130 = 2 \cdot 65.$$

Vi ser att fem är en positiv delare till 65 och

$$65 = 5 \cdot 13.$$

Vi har alltså visat att

$$520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Lägg märke till att $2, 5$ och 13 alla är primtal. Vi säger att vi har *primtalsfaktoriserat* 520. Primtalsfaktoriseringen av ett positivt heltal är unik. Detta är Aritmetikens fundamentalsats och tas upp i högre kurser i algebra.

Primtalsfaktoriseringen av ett tal hjälper oss att bestämma delarna till talet som följande exempel visar.

Exempel 1.15. *Hur många positiva delare har talet* 520*?*

Lösningsförslag: Enligt ovan gäller det att $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$. Läsaren bör övertyga sig om att de positiva delarna till talet är talen på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. Detta ger delarna

$$\begin{array}{llll}
2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 1 & 2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 13 & 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 5 & 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 65 \\
2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 2 & 2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 26 & 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 10 & 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 130 \\
2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 4 & 2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 52 & 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 20 & 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 260 \\
2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 8 & 2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 104 & 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 40 & 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 520.
\end{array}$$

Det finns alltså 16 positiva delare till 520.

★

Om man vill ta reda på om ett tal a är ett primtal så kan undersöka om a delas av primtalen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Har man gått igenom alla primtal som är mindre än a och inte funnit någon positiv delare så vet man att a självt måste vara ett primtal. Men man behöver i själva verket inte testa alla primtal fram till talet a utan det räcker att testa alla primtal som är mindre än eller lika med $\sqrt{a}$. Kan du fundera ut varför det är så?

Exempel 1.16. *Är* 257 *ett primtal?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att uppskatta hur stort $\sqrt{257}$ är. Eftersom $20^2 = 400$ så gäller det att $\sqrt{400} = 20$. Alltså måste $\sqrt{257}$ vara mindre än 20. Vi har att $17^2 = 289$, alltså måste $\sqrt{257}$ även vara mindre än 17. Men $16^2 = 256$, så $\sqrt{257}$ är större än 16. Primtalen som är mindre än 17 är $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Eftersom 257 är udda så kan det inte vara delbart med 2. Eftersom $257 = 3 \cdot 85 + 2$ lämnas resten 2 vid division med tre och är alltså inte delbart med tre. Vi har att $5 \cdot 51 + 2 = 257$, alltså är 257 inte heller delbart med fem. Det lämnas som en övning till läsaren att verifiera att inte heller $7, 11$ och 13 är delare till 257. Alltså är 257 ett primtal. ★

Observera att primtalsfaktoriseringen av ett primtal är primtalet självt.

Övningar

1. Hur många positiva delare har talet 8?

2. Hur många äkta delare har talet 8?

3. Hur många positiva delare har talet $2^3 \cdot 5 \cdot 23^4$?

4. Avgör om talen 85, 133 och 661 är primtal. Om något tal inte är ett primtal så primtalsfaktorisera det och bestäm antalet positiva delare.

5. Försök att primtalsfaktorisera ditt personnummer eller telefonnummer med hjälp av en miniräknare. Kommentar: Detta är det enda stället i kompendiet där du förväntas använda en miniräknare!

1.4 Moduloräkning

Moduloräkning, eller *kongruensräkning*, hänger samman med begreppet rest och är något vi ofta använder oss av ofta utan att reflektera över det. Låt oss börja med ett exempel.

Exempel 1.17. *Niklas går och lägger sig klockan 23.00 och vill sova åtta timmar för att vara pigg dagen efter. Vad ska han ställa klockan på (förutsatt att han somnar direkt när han lägger sig)?*

Lösningsförslag: För att ta reda på detta skulle man kunna tänka sig att man lägger till 8 till 23:

$$23 + 8 = 31.$$

Men försök ställa klockan på 31! Det vi gör istället är att vi drar bort ett dygn, det vill säga 24 timmar. Att dra bort 24 timmar är detsamma som att börja om på noll när vi kommer till 24. Vi får nu

$$23 + 8 - 24 = 31 - 24 = 7.$$

Niklas borde alltså ställa klockan på 07.00. ★

Det vi gjorde i exemplet ovan var att vi räknade *modulo* 24. Det digitala klockor visar är egentligen resten vid heltalsdivision med 24. Låt oss nu ge en formellt definition.

Definition 4. *Om två tal a och b skiljer sig åt med en multipel av n, det vill säga att det existerar ett heltal k så att $a - b = k \cdot n$, så säger vi att a och b är kongruenta modulo n. Detta skrivs $a \equiv b \pmod{n}$ eller $a \equiv_n b$ och utläses "a kongruent med b modulo n".*

Exempel 1.18. *Det gäller att $18 \equiv_4 14$ eftersom $18 - 14 = 4$, vilket så klart är en multipel av fyra.*

Speciellt gäller att om talet a lämnar resten r vid division med b, så är a och r kongruenta modulo b.

Exempel 1.19. *Resten då 120 delas med 17 är 1, ty $120 = 7 \cdot 17 + 1$. Alltså är $120 \equiv 1 \pmod{17}$.*

Omvänt gäller det att om a och r är kongruenta modulo b och $0 \le r < b$ så lämnar a resten r vid division med b.

Exempel 1.20. *Det gäller att $19 \equiv_4 3$ och eftersom $0 \le 3 < 4$ så lämnar 19 resten 3 vid division med 4.*

Exempel 1.21. *Idag är det tisdag, vad är det för veckodag om 37 dagar?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att notera att 37 dagar är detsamma som fem veckor och två dagar. Vi söker alltså den veckodag som är två dagar efter tisdag, det vill säga torsdag. Detta svarar givetvis mot beräkningen

$$37 \equiv_7 2$$

. ★

Vid moduloräkning kan kan man använda de tre räknesätten addition, subtraktion och multiplikation för att förenkla beräkningarna. Division är däremot inte definierat i allmänhet.

Sats 5. *Låt a vara ett positivt heltal och låt m_1, m_2, n_1 och n_2 vara heltal sådana att $m_1 \equiv n_1 \pmod{a}$ och $m_2 \equiv n_2 \pmod{a}$. Då gäller*

- $m_1 + m_2 \equiv_a n_1 + n_2$,
- $m_1 - m_2 \equiv_a n_1 - n_2$,
- $m_1 \cdot m_2 \equiv_a n_1 \cdot n_2$.

Innan vi bevisar satsen ska vi illustrera hur den kan användas med ett par exempel.

Exempel 1.22. *Vad blir resten då $18 + 11$ delas med 5?*

Lösningsförslag 1: Vi beräknar först summan $18 + 11 = 29$. Vi har

$$29 \equiv_5 4 \pmod{5}$$

och eftersom $0 \le 4 < 5$ så lämnar $18 + 11$ rest 4 vid division med 5. ★

Men enligt regel ett från Sats 5, så kan vi istället finna kongruenta tal till 18 och 11 för att därefter addera dem.

Lösningsförslag 2:

$$18 + 11 \equiv_5 3 + 1 = 4.$$

★

Exempel 1.23. *Finn det minsta icke-negativa tal som är kongruent med $12 - 7$ (mod 3).*

Lösningsförslag 1: Vi har $12 - 7 = 5 \equiv 2 \pmod 3$. Eftersom $0 \leq 2 < 3$ så är 2 det sökta svaret. ★
Ett alternativt sätt är att använda regel två från Sats 5, det vill säga att vi först tar reda på resten modulo 3 för de båda talen 12 och 7 och sedan subtraherar dem.
Lösningsförslag 2: Vi har att $12 \equiv_3 0$ och $7 \equiv_3 1$ och får

$$12 - 7 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Observera att vi i sista steget adderade tre eftersom -1 är ett negativt tal. ★

Exempel 1.24. *Finn det minsta icke-negativa tal som är kongruent med $8 \cdot 7 \pmod 5$.*

Lösningsförslag: Eftersom $8 \cdot 7 = 56 \equiv 1 \pmod 5$ och $0 \leq 1 < 5$ så är svaret 1. ★

Ett alternativt sätt är att använda regel tre från Sats 5. det vill säga att vi först tar reda på resten modulo 5 för de båda talen 8 och 7 och sedan multiplicera resterna.
Lösningsförslag 2: Vi får $8 \cdot 7 \equiv_5 3 \cdot 2 = 6$. Men talet 6 är sin tur kongruent med 1 modulo 5. ★

Om man har stora tal är denna andra lösning avsevärt mindre krävande rent beräkningsmässigt.

För den intresserade läsaren ger vi nu beviset för Sats 5.

Bevis 5. *Eftersom $m_1 \equiv_a n_1$ så är $m_1 - n_1 \equiv_a 0$, det vill säga $m_1 - n_1 = s \cdot a$, för något heltal s. På samma sätt följer det av $m_2 \equiv_a n_2$ att $m_2 - n_2 = t \cdot a$ för något heltal t.*

Vi får att

$$(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = m_1 - n_1 + m_2 - n_2 = s \cdot a + t \cdot a = (s + t)a,$$

vilket innebär att $(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)$ är delbart med a. Men det betyder att

$$(m_1 + m_2) \equiv_a (n_1 + n_2),$$

vilket bevisar regel ett i satsen.

Beviset för regel två är i princip identiskt med beviset för regel ett och utelämnas därför.

När det gäller regel tre har vi

$$m_1m_2 - n_1n_2 = (m_1 - n_1)m_2 + n_1(m_2 - n_2) = s \cdot a \cdot m_2 + n_1 \cdot t \cdot a = (s \cdot m_2 + t \cdot n_1)a$$

Alltså är $m_1m_2 - n_1n_2$ delbart med a, från vilket det följer att $m_1m_2 \equiv_a n_1n_2$.

Följande exempel illustrerar fördelen med att använda Sats 5 för att angripa faktorerna i en produkt innan vi utför multiplikationen.

Exempel 1.25. *Bestäm resten då $38 \cdot 41 + 43 \cdot 36$ delas med 3.*

Lösningsförslag: Vi har att

$$38 = 12 \cdot 3 + 2, \quad 41 = 13 \cdot 3 + 2, \quad 43 = 14 \cdot 3 + 1 \quad \text{och} \quad 36 = 12 \cdot 3 + 0.$$

Alltså är

$$38 \cdot 41 + 43 \cdot 36 \equiv 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod 3.$$

Eftersom $0 \leq 1 < 3$ kan vi dra slutsatsen att resten är lika med 1. ★

Exempel 1.26. *Vad blir resten då 4^7 delas med 7?*

Lösningsförslag:

Det gäller att $16 \equiv_7 2$, så genom att skriva $4^7 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot 4$ får vi $4^7 \equiv_7 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \equiv_7 4 \cdot 2 \cdot 4 \equiv_7 2 \cdot 2 \equiv_7 4$. Eftersom $0 \leq 4 < 7$ så är resten då 4^7 delas med 7 lika med 4.

★

Exempel 1.27. *Vad blir resten då* 4^{127} *delas med* 7*?*

Lösningsförslag: För att lösa den här uppgiften använder vi potensreglerna tillsammans med den tredje regeln i Sats 5 upprepade gånger.

Eftersom $4^2 \equiv_7 2$ så är $4^3 \equiv_7 4 \cdot 2 \equiv_7 1$. Nu är $127 = 3 \cdot 42 + 1$, så $4^{127} = 4^{3 \cdot 42+1} = (4^3)^{42} \cdot 4$, varur det följer att $(4^3)^{42} \cdot 4 \equiv_7 1^{42} \cdot 4 \equiv_7 4$. Eftersom $0 \leq 4 < 7$ så är resten då 4^{127} delas med 7 lika med 4, det vill säga samma som i föregående uppgift. ★

Exempel 1.28. *Vad blir resten då* 2^{125} *delas med* 6*?*

Lösningsförslag: Vi utnyttjar att $2^3 = 8$ och att $8 \equiv_6 2$. Vi får $2^{125} = 2^{3 \cdot 41+2} = 2^{3 \cdot 41} \cdot 2^2 = (2^3)^{41} \cdot 2^2$ och alltså gäller det att $2^{125} = (2^3)^{41} \cdot 2^2 \equiv_6 2^{41} \cdot 2^2 = 2^{43}$. Vi fortsätter omskrivningen och får

$$2^{43} = 2^{3 \cdot 14} \cdot 2 = (2^3)^{14} \cdot 2 \equiv_6 2^{14} \cdot 2 = 2^{15} = (2^3)^5 \equiv_6 2^5 = 2^3 \cdot 2^2 \equiv_6 2 \cdot 4 \equiv_6 2.$$

Eftersom $0 \leq 2 < 6$ så lämnar 2^{125} resten 2 vid division med 6.

★

Kuriosa 4. *Moduloräkning har en mycket viktig tillämpning inom kryptering. RSA-algoritmen, som många banker använder, utnyttjar en beräkningsasymmetri som uppstår vid just kongruensberäkningar.*

Övningar

1. Vilken rest erhålls då $18 + 7$ divideras med 5?
2. Vilken rest ger 64 vid division med 3?
3. Idag är det fredag. Vilken veckodag är det om 101 dagar?
4. Vilken rest erhålls då $64 \cdot 78 - 65 \cdot 101$ delas med 5?
5. Vilken rest erhålls då 3^7 delas med 10?
6. Vilken rest erhålls då 2^{204} delas med 11?
7. (svår) Siffersumman av ett tal är summan av de ingående siffrorna. Visa att ett tal som har en siffersumma som är delbar med tre i sig är delbart med tre. Exempel: Talet 138 har siffersumman $1 + 3 + 8 = 12$ som är delbart med tre. Alltså är 138 delbart med tre enligt påståendet ovan. Tips: Nästa avsnitt, särskilt representationen i ekvation 1.5.1 nedan, kan vara till hjälp.

1.5 Representation av heltal

Vi är så vana med hur vi skriver tal att vi knappast lägger märkte till tanken bakom. Tio kronor skriver vi som 10 kr, och nittiofem kronor som 95 kr. Men det finns många andra sätt att skriva, eller med ett finare ord, *representera* tal på. Du har antagligen stött på romersk representation av tal, där ett, fem och tio skrivs som I, V respektive X. Det här avsnittet kommer att handla om hur man kan representera tal i olika *talbaser*.

Varför är detta intressant? Låt säga att du vill beskriva hur många femtio stenar är. Du kan givetvis rita femtio streck och säga att du ser en sten för varje streck. Denna metod fungerar inte så bra i praktiken, varför vi uppfann *positionssystemet*, som ett sätt att representera olika antal.

Låt oss titta på uttrycket 3524. Vilket antal representerar detta? Skulle vi gå till banken och ta ut denna summan pengar så skulle vi sannolikt få tre stycken tusenlappar, fem hundralappar, två tiokronor och fyra enkronor. Här ser vi ett tydligt mönster, varje mynt eller sedel motsvarar en viss potens av tio. Vi har alltså att $3524 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Att vi använder just talet tio härstammar från att vi har tio fingrar. Naturligtvis är 3524 inte alls samma som 5342, siffrornas position är betydande för talets värde och varje position motsvarar en viss potens av talet tio. Därför kallas vårt sätt att representera tal för positionssystemet med bas 10, även kallat decimalsystemet.

Allmänt så representerar vi heltal i bas tio enligt följande. Talet

$$s_n \cdot 10^n + s_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + s_1 \cdot 10^1 + s_0 \cdot 10^0, \tag{1.5.1}$$

där varje tal s_i är ett heltal mellan noll och nio, skrivs

$$s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0.$$

Här är $s_n, s_{n-1}, \dots, s_1, s_0$ siffrorna i talet.

Exempel 1.29. *För talet* 3524 *är* $s_3 = 3$, $s_2 = 5$, $s_1 = 2$ *och* $s_0 = 4$.

Tanken är att representationen ska vara unik, varje tal ska bara kunna skrivas på ett enda sätt. Detta för att helt enkelt undvika förvirring. För att det ska gälla måste siffrorna s_i uppfylla att $0 \leq s_i \leq 9$.

Men förutom att tio är antalet fingrar vi har på händerna så är det inget speciellt med detta tal. I det här avsnittet ska vi gå igenom hur vi kan representera tal i positionssystemet med bas 2.

En dator lagrar sin data i positionssystemet med bas 2. Positionssystemet med bas 2 kallas oftast för det *binära talsystemet.*

Heltal i det binära talsystemet

I det binära talsystemet representeras talet 28 på följande sätt.

Representation i bas 2:	1	1	1	0	0
Positionsvärde:	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 28$				

Vi skriver detta som att $28_{10} = 11100_2$. I fortsättningen kommer vi inte att skriva ut 10:an för att markera att vi använder det decimala talsystemet, utan nöjer oss med att skriva $28 = 11100_2$.

Observera att i bas 2 använder vi bara två siffror, 0 och 1. Vi kan se det som att vi har 28 enkronor och växlar dessa till mynt med valörerna $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ och sedan anger hur många mynt vi har av varje myntsort.

I allmänhet så representeras tal i bas 2 som följer.

Hur ett heltal skrivs i bas 2						
Representation i bas 2:	$\dots$	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0
Positionsvärde:	$\dots$	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$\cdots + s_4 \cdot 2^4 + s_3 \cdot 2^3 + s_2 \cdot 2^2 + s_1 \cdot 2^1 + s_0 \cdot 2^0$					

Exempel 1.30. *Skriv 18 i bas 2.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att bestämma den största tvåpotens som är mindre än eller lika med 18. Vi ser att $2^5 = 32$ är för stort $(32 > 18)$. Däremot funkar $2^4 = 16$ alldeles utmärkt. Vi har nu bara en tvåa kvar att konvertera eftersom $18 - 16 = 2$. Vi använder då att $2^1 = 2$ och ser att vi kan skriva 18 i bas 2 enligt

$$18 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10010_2.$$

★

Om man har ett tal skrivet i bas 2 kan man så klart också skriva om det i bas 10. Man använder helt enkelt samma metod fast baklänges. Låt oss illustrera detta med ett exempel.

Exempel 1.31. *Konvertera* 110_2 *till bas* 10.

Lösningsförslag: Vi skriver först om 110_2 i tvåpotenser och beräknar sedan

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6.$$

★

Övningar

1. Konvertera 34 till bas 2.
2. Konvertera 1101_2 till bas 10.

1.6 Rationella tal

Vi har nu tagit upp de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$, de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$. Vi har även studerat moduloräkning och talrepresentationer. Nästa steg på vägen är de *rationella talen.*

Om a och b är två heltal så kommer lösningen till ekvationen

$$a + x = b$$

alltid att vara ett heltal eftersom

$$x = b - a$$

och heltalen ju är slutna under subtraktion. Men vad händer om vi vill lösa ekvationen

$$a \cdot x = b$$

där a och b är heltal? Är x ett heltal? Givetvis kan x vara ett heltal, exempelvis om $a = 4$ och $b = 12$ så är $x = 12/4 = 3$. Men om $a = 12$ och $b = 4$ så erhåller vi x genom att dividera båda leden i ekvationen

$$12 \cdot x = 4$$

med 12, så

$$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Detta är ett bråktal, eller ett rationellt tal som vi kommer att kalla det i fortsättningen. Ett godtyckligt rationellt tal kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$, där a och b är heltal och $b \neq 0$. Talet a i det rationella talet $\frac{a}{b}$ kallas *täljare* och b kallas *nämnare*.

Bland de rationella talen kan man alltid hitta lösningen till ekvationen $b \cdot x = a$ för två heltal a och b där $b \neq 0$.

Begreppet *rationellt tal* är besläktad med den engelska termen *ratio* som betyder *förhållande*.

Man betecknar mängden av alla rationella tal med $\mathbb{Q}$, efter det engelska ordet *quotient* som betyder *kvot*. Det gäller därför att mängden av heltal är en delmängd till mängden av rationella tal, vilket vi ju som bekant uttrycker som $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

När vi löste ekvationen $12 \cdot x = 4$ så utnyttjade vi att

$$\frac{4}{12} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vi säger att $1/3$ är skrivet på *förkortad form*. Att vi inte kan förkorta bråket $1/3$ mer beror på att 1 och 3 saknar gemensamma delare (förutom 1). För att hitta den förkortade formen av ett bråk a/b kan vi primtalsfaktorisera både a och b. När vi väl har funnit primtalsfaktoriseringen kan vi förkorta bråket så att de inte längre har gemensamma delare.

Exempel 1.32. *Förkorta* $90/105$.

Lösningsförslag 1: Vi har att $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ och att $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, så

$$\frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

★

Ibland kan det vara lätt att se att två bråk har en gemensam delare. I så fall kan vi utföra förkortningen direkt. Låt oss därför titta på ett annat lösningsförslag.

Lösningsförslag 2: Vi ser att både 90 och 105 är delbara med 5, vi har nämligen att $90 = 5 \cdot 18$ och $105 = 5 \cdot 21$, så $90/105 = 18/21$. Vi har att $18 = 3 \cdot 6$ och $21 = 3 \cdot 7$, alltså är $90/105 = 18/21 = 6/7$. ★

Primtalsfaktorisering är beräkningstungt, och som tur är finns det en bättre metod för att avgöra om ett bråk är maximalt förkortat. Denna metod heter *Euklides algoritm* och den gås normalt igenom i högskolornas grundkurser.

Ibland skriver man sneda bråkstreck och ibland raka. Det är ingen skillnad i betydelse, alltså gäller det att

$$a/b = \frac{a}{b}.$$

Men i många sammahang är det tydligare att använda den senare framställningen.

1.6.1 Addition, multiplikation och division av rationella tal

Vi adderar bråk genom att göra *liknämnigt* och skriva dem på *gemensamt bråkstreck* enligt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Exempel 1.33.

Skriv $\frac{3}{4} + \frac{-4}{5}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$\frac{3}{4} + \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-1}{20} = -\frac{1}{20}$$

★

Vid addition av bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$ ovan användes den gemensamma nämnaren $b \cdot d$. Om de två första nämnarna b och d har gemensamma faktorer kan man hitta en gemensam nämnare som är mindre än $b \cdot d$. Vi visar med ett exempel.

Exempel 1.34.

$$\textit{Skriv} \quad \frac{1}{6} + \frac{3}{14} \ \textit{på förkortad form.}$$

Lösningsförslag: Vi har $6 = 2 \cdot 3$ och $14 = 2 \cdot 7$, så genom att multiplicera båda sidor i det första bråket med 7 och båda sidor i det andra med 3 får vi liknämnigt. Detta ger oss

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{14} = \frac{7}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{14} = \frac{7+9}{42} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21}.$$

★

Vi multiplicerar bråk genom att multiplicera täljare och nämnare för sig;

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exempel 1.35.

$$\textit{Beräkna} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} \ \textit{och svara på förkortad form.}$$

Lösningsförslag 1:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-12}{20} = -\frac{12}{20} = -\frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Givetvis kan vi förkorta bråket i det andra steget direkt.

Lösningsförslag 2:

$$\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{-\cancel{4}}{5} = \frac{3 \cdot (-1)}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Division av bråk ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot b \cdot d} = \frac{\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b} \cdot d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot b \cdot \cancel{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Exempel 1.36.

$$\textit{Skriv} \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}} \ \textit{på förkortad form.}$$

Lösningsförslag:

$$\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{-3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Exempel 1.37.

$$\textit{Skriv } \frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} \textit{ på förkortad form.}$$

Lösningsförslag 1:

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} - \frac{8}{5} = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} - \frac{8}{5} = \frac{5}{8}.$$

★

Lösningsförslag 2:

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}} + \frac{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}}{2 \cdot 4} - \frac{8}{5} = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} - \frac{8}{5} = \frac{5}{8}.$$

★

Exempel 1.38.

$$\textit{Skriv } 2/(2/3) + (5/4)/2 \textit{ på förkortad form.}$$

Lösningsförslag 1:

$$2/(2/3) + (5/4)/2 = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{1} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}.$$

★

Lösningsförslag 2:

$$2/(2/3) + (5/4)/2 = \frac{2 \cdot 3}{\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}} + \frac{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{1} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}.$$

★

Exempel 1.39.

$$\textit{Skriv } \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \textit{ på förkortad form.}$$

Lösningsförslag:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{14 + 10 - 105}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{-81}{2 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Vi har här behållit faktorerna i nämnaren för att lättare kunna kontrollera huruvida bråket är skrivet på förkortad form eller ej. Eftersom $81 = 9 \cdot 9 = 3^4$ så saknar täljare och nämnare gemensamma delare. Alltså är

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} = -\frac{81}{70}.$$

★

1.6.2 Blandad form och decimalform

På högskolan undviker vi att svara på så kallad blandad form. Det främsta skälet till det är att det kan vara oklart vad som avses. Den blandade formen $2\frac{2}{3}$ betyder två hela och två tredjedelar, det vill säga $2+\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$. Samtidigt är det snarlika uttrycket $2\cdot\frac{2}{3}$ lika med $\frac{4}{3}$, vilket är något helt annat.

Decimalform använder vi oss i princip endast av när vi behöver avrunda. Bråket $\frac{2}{10}$ förkortar vi till $\frac{1}{5}$ istället för att skriva det som $0,2$. Observera dessutom att uttryck som $\frac{1}{3}$ inte ens kan skrivas på exakt decimalform.

1.6.3 De rationella talens slutenhet

Kanske tänker du nu att mängden $\mathbb{Q}$ är sluten under division. Detta skulle betyda att om p,q är två godtyckliga rationella tal ska det gälla att p/q är ett rationellt tal. Men detta kan inte stämma i det allmänna fallet. För även talet 0 är ju ett rationellt tal och $p/0$ är inte definierat.

För att slutenhet ska gälla vid division måste vi alltså betrakta mängden av rationella tal utan talet 0. Inom denna mängd gäller att division av två godtyckliga element (nollskilda rationella tal) ger oss ett element i samma mängd. Givetvis är mängden av alla rationella tal $\mathbb{Q}$ sluten under addition, subtraktion och multiplikation då alla dessa operationer med rationella tal resulterar i rationella tal.

Övningar

1. Skriv $1/3+1/2+1/7$ på förkortad form.
2. Skriv $2\cdot 1/3+\dfrac{-2}{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{\dfrac{8}{3}}{2}$ på förkortad form.
3. Skriv $\dfrac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{3}}$ på förkortad form.
4. Representerar $-1/3$ och $\frac{1}{-6}/\frac{1}{2}$ samma rationella tal?
5. Låt $s=-\dfrac{1}{9}, t=-\dfrac{1}{6}, u=\dfrac{3}{2}$ och bestäm
   (a) $s\cdot t+u$
   (b) $\dfrac{s}{t}\Big/\dfrac{s}{u}$
   (c) $\dfrac{s-t}{t-u}$
   (d) $(s-u)\cdot\dfrac{t}{u+t}$.

1.7 Reella tal

Ett rationellt tal har antingen en ändlig decimalutveckling (till exempel $1/10=0,1$), eller en oändlig, men upprepad, decimalutveckling (till exempel $1/3=0,333333\ldots$).

På motsvarande sätt karaktäriseras de *irrationella* talen av att ha en oändlig decimalutveckling som inte upprepar sig, och ett irrationellt tal kan alltså inte skrivas som en kvot mellan två heltal.

Att det finns tal som inte är rationella upptäcktes av Pythagoras (500-talet f kr). Du känner säkert till att diagonalen på en kvadrat med sidan ett har längd $\sqrt{2}$. Detta tal kan inte uttryckas som en kvot av två heltal är ett exempel på ett *irrationellt* tal. Ett annat exempel på ett irrationellt tal är π som är ungefär lika med $3,14$.

Kuriosa 5. *För att visa att $\sqrt{2}$ är irrationellt antar man att $\sqrt{2}$ kan skrivas som ett bråk, det vill säga som a/b, där a och b är heltal. Man visar sedan att detta leder till en motsägelse. Detta bevis utfördes av Aristoteles (300-talet f kr) och är ett utmärkt exempel på ett motsägelsebevis. Beviset är inte så komplicerat och brukar ingå i högskolornas grundkurser i matematik.*

De irrationella talen utgör tillsammans med de rationella talen de *reella talen*. De reella talen betecknas med $\mathbb{R}$ och det gäller alltså att $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Även om de rationella talen ligger oändligt tätt längs tallinjen, så finns även ett oändligt antal hål på tallinjen och det är dessa som utgörs av de irrationella talen. Att de rationella talen ligger oändligt tätt ska tolkas som att det mellan två godtyckliga rationella tal alltid finns oändligt många rationella tal! Men för att få med alla tal reella tal måste vi alltså ta med både de rationella och de irrationella talen.

1.7.1 Mer om potenser

I heltalskapitlet stötte vi på potensbegreppet. Vi ska nu generalisera begreppet till de reella talen, men vi måste vara lite försiktiga. Vi kommer att titta på två olika fall.

1. Basen är ett reellt tal och exponenten är ett heltal, till exempel $(-\sqrt{2})^2$ eller 2^{-3}.
2. Basen är ett positivt reellt tal och exponenten är ett rationellt tal, till exempel $4^{1/2}$ eller $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Vi börjar med fall 1. Först låter vi exponenten vara ett positivt heltal. Det är naturligt att låta

$$r^a = \underbrace{r \cdots r}_{a \text{ gånger}},$$

vilket för ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ innebär att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p}{q} \cdots \frac{p}{q} = \frac{p^a}{q^a}.$$

Exempel 1.40. *Vi räknar det första exemplet från fall 1. Vi får*

$$(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Låt nu exponenten vara ett icke-positivt heltal. Vi definierar

$$r^0 = 1 \text{ när } r \neq 0 \quad \text{ och } r^{-a} = \frac{1}{r^a}.$$

Observera alltså att $4^0 = (-13)^0 = (\sqrt{2})^0 = (\frac{1}{4})^0 = 1$, men att 0^0 inte är definierat.

Exempel 1.41. *Vi räknar det andra exemplet i fall 1 och får*

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Vi fortsätter med fall 2, där exponenten r är ett rationellt tal och basen a ett icke-negativt heltal. Då definierar vi $a^{1/2}$ som det positiva tal b vars kvadrat är lika med a, det vill säga att $a^{1/2} = \sqrt{a}$. På liknande sätt definierar vi, då a är ett icke-negativt heltal, $a^{1/n}$ som det positiva tal b som upphöjt till n är lika med a, alltså $b^n = a$.

Exempel 1.42.

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2, \quad 27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3\cdot(1/3)} = 3^1 = 3, \quad (2^{10})^{1/10} = 2$$

$\boxed{\text{Observera att } \sqrt{4} = 2 \text{ och inte } -2\text{, eftersom vi kräver att } \sqrt{4} \text{ ska vara positivt.}}$

Slutligen, om a är är ett icke-negativt heltal så definierar vi

$$a^{c/d} = (a^c)^{1/d}.$$

Exempel 1.43. *Förenkla* $4^{3/2}$.

Lösningsförslag 1: Vi använder definitionen och skriver $4^{3/2} = (4^3)^{1/2} = \sqrt{4^3}$. Vi fortsätter och får $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. ★

Lösningsförslag 2: Man kan också utnyttja potenslagen $(a^b)^c = a^{bc}$ och omskrivningen $4 = 2^2$ för att få

$$4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^{2\cdot 3/2} = 2^3 = 8.$$

★

För att se fördelen med det senare sättet, betrakta $128^{4/7}$. Att beräkna 128^4 och sedan försöka finna sjunderoten av det talet är givetvis inte att föredra framför omskrivningen $128 = 2^7$ och beräkningen $2^{7\cdot 4/7} = 2^4 = 16$.

Exempel 1.44. *Förenkla* $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Lösningsförslag 1:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt{2}^2)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}.$$

★

Lösningsförslag 2:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = (\sqrt{2}^2)^{-1/3} = 2^{-1/3}.$$

★

Lösningsförslag 3:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = (2^{1/2})^{-2/3} = 2^{(1/2)\cdot(-2/3)} = 2^{-1/3}.$$

★

Exempel 1.45. *Skriv*

$$\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot \sqrt{27}}{9^3\cdot(-3)^3\cdot 3^{-1/3}}$$

på formen $-3^{a/b}$, *där* a/b *är ett maximalt förkortat bråk.*

Lösningsförslag

$$\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot \sqrt{27}}{9^3\cdot(-3)^3\cdot 3^{-1/3}} = \frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot (3^3)^{1/2}}{(3^2)^3\cdot(-1)^3\cdot(3)^3\cdot 3^{-1/3}} = \frac{3^{1/3-2+3/2}}{(-1)^3\cdot 3^{2\cdot 3+3-1/3}} = \frac{3^{-1/6}}{-3^{26/3}} =$$

$$-\frac{3^{-1/6}}{3^{26/3}} = -3^{-1/6-26/3} = -3^{-53/6}.$$

★

Vi har inte definierat potenser a^r med negativ bas a och rationell exponent r, så som till exempel $(-1)^{1/2}$. Hur man gör det är problematiskt och återkommer först i senare högskolekurser. Men problemet är relaterat till komplexa tal och detta är något som vi nu ska titta på.

Övningar

1. Beräkna 2^6
2. Beräkna $\sqrt{(-2)^2}$
3. Beräkna $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.
4. Beräkna $\sqrt{3}^4 + (3^{1/3})^{-3}$.
5. Beräkna $81^{3/4}$.
6. Beräkna $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$.
7. Skriv
$$\frac{2^{-1/3} \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{64}}{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1/8}}$$
på formen $2^{a/b}$, där a/b är ett maximalt förkortat bråk.

1.8 Komplexa tal

Man kan tycka att de reella talen, $\mathbb{R}$, är alla tal man någonsin skulle behöva här i livet. Men på 1500-talet insåg man att man behövde uppfinna ett nytt slags tal för att kunna lösa vissa ekvationer och man införde de *komplexa talen* .

Varje komplext tal z består av en reell del och en imaginär del och z kan skrivas som $a + bi$, där a och b är reella tal och i är den *imaginära enheten*. Den imaginära enheten i har egenskapen att $i^2 = -1$, vilket är precis det som krävs för att vi ska kunna lösa ekvationen $x^2 = -1$. Ibland skriver man $i = \sqrt{-1}$, men detta kan leda till problem, så det bör undvikas. Notera till exempel följande ”räkning”: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}$”=”$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$. Problemet är att räkneregeln $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ inte gäller då a och b är negativa.

Varje komplext tal $a + bi$ svarar alltså mot ett par (a, b) av reella tal. Vi kallar a för *realdelen*, och b för *imaginärdelen*. Realdelen av ett komplext tal z skrivs $\mathrm{Re}(z)$, och imaginärdelen skrivs $\mathrm{Im}(z)$.

Exempel 1.46. *Låt* $z = \frac{1}{4} + 5i$. *Då är* $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{4}$ *och* $\mathrm{Im}(z) = 5$.

Bildligt talat kan man säga att när man inför de komplexa talen så lägger man till en ny dimension. De reella talen kan representeras på en tallinje, medan de komplexa talen kan framställas i ett talplan, där realdelen är x-koordinaten och imaginärdelen är y-koordinaten.

Mängden av alla komplexa tal skrivs $\mathbb{C}$. Observera att de komplexa tal vars imaginärdel är 0, kommer vara de vanliga reella talen, $\mathbb{R}$. Detta innebär att $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Vi har alltså

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

När man adderar komplexa tal så adderar man realdelarna och imaginärdelarna för sig,

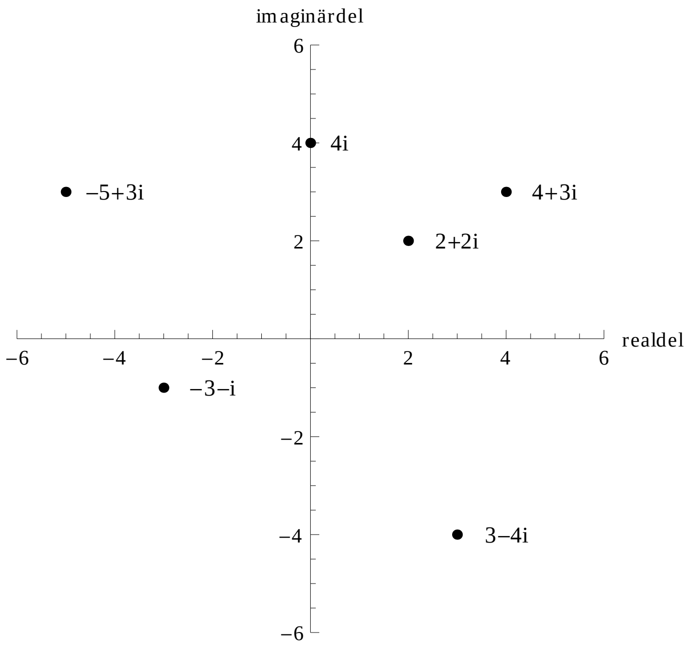
$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

där a_1, a_2, b_1, b_2 är reella tal. Subtraktion behandlas på liknande sätt och vi har

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Så här långt så är det inte så märkligt. Men när vi ska multiplicera två komplexa tal $a_1 + ib_1$ och $a_2 + b_2 i$ får vi

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$



Figur 1: Här är det komplexa talplanet med några komplexa tal utmärkta.

genom att använda den distrubutiva lagen och sambandet $i^2 = -1$. Formeln är ingenting man behöver lära sig utantill, det är bättre att utföra multiplikationen direkt.

Exempel 1.47. *Låt* $z = 1 - 2i$ *och* $w = 3 + 4i$. *Beräkna* $z + w$, $z - w$ *och* $z \cdot w$.

Lösningsförslag: Vi använder reglerna ovan och får

$$z + w = (1 - 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 - 2i + 4i = 4 + 2i.$$

Subtraktion ger att

$$z - w = (1 - 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 - 2i - 4i = -2 - 6i.$$

Vi utför sedan multiplikationen och får

$$z \cdot w = (1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot 4i = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i.$$

Alltså har vi att $z + w = 4 + 2i$, $z - w = -2 - 6i$ och $z \cdot w = 11 - 2i$. ★

De regler för addition och multiplikation som gäller för reella tal fungerar även för komplexa tal. Observera att vi ännu inte gett någon metod för att dividera två komplexa tal. Detta gör vi i nästa avsnitt.

Du kan själv verifiera att för komplexa tal z, w och v gäller det att

$z + w = w + z$	Kommutativa lagen för addition
$(z + w) + v = z + (w + v)$	Associativa lagen för addition
$z \cdot w = w \cdot z$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$	Associativa lagen för multiplikation
$z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$	Distributiva lagen

Exempel 1.48. *Beräkna* $(2i)^3$.

Lösningsförslag: Vi har att $(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3$ som blir $8i^3$. Vidare är $i^3 = i^2 \cdot i$ och $i^2 = -1$, så $i^3 = -i$. Alltså är $8i^3 = -8i$. ★

Övningar

1. Beräkna $2 - i + 3 + 4i$.
2. Beräkna $2i \cdot (2 - 2i)$.
3. Låt $z = 1 - i$ och $w = 2 + \frac{i}{3}$.
   (a) Beräkna $z + w$.
   (b) Beräkna $z - w$
   (c) Beräkna $z \cdot w$.
4. Beräkna i^{10}.
5. Beräkna i^{1024}.
6. Bestäm realdelen och imaginärdelen till $z = (1 + i)^3$.

1.9 Kvadreringsreglerna och konjugatregeln

Genom att använda den distributiva lagen och den kommutativa lagen för multiplikation ska vi härleda *kvadreringsreglerna* och *konjugatregeln*. Eftersom den kommutativa och den distributiva lagen gäller för alla de talsystem vi berör i detta material så kommer dessa regler att gälla för alla dessa talsystem.

1.9.1 Kvadreringsreglerna

Vi noterar först att

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Genom att betrakta specialfallet $a = c$ och $b = d$ får vi kvadreringsregeln

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ibland kallas denna regel istället första kvadreringsregeln och då vi byter ut b mot $-b$ får vi det som ibland kallas *andra kvadreringsregeln.* Då gäller alltså att

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Att gå från vänsterled till högerled brukar ofta vara lätt, men det är lika viktigt att kunna köra omskrivningar från högerled till vänsterled.

Exempel 1.49. *Använd kvadreringsregeln för att beräkna* 101^2.

Lösningsförslag: Ett bra sätt att beräkna kvadraten på ett mer komplicerat tal är att skriva om talet som summan av två tal vars kvadrater lätt kan beräknas. I detta exempel är det praktiskt att göra omskrivningen $101^2 = (100 + 1)^2$. Vi kan nu enkelt använda kvadreringsregeln för att beräkna kvadraten och får

$$(100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$$

★

Exempel 1.50. *Faktorisera* $x^2 - 2x + 1$.

Lösningsförslag: Här kan vi direkt använda andra kvadreringsregeln baklänges (med $a = x, b = 1$) och vi får

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

★

Exempel 1.51. *Faktorisera uttrycket*

$$x^3 + 4x^2 + 4x.$$

Lösningsförslag: Vi börjar med att bryta ut x eftersom x finns i alla termer i uttrycket.

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4),$$

och därefter använder vi första kvadreringsregeln baklänges

$$x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2.$$

★

1.9.2 Konjugatregeln

Konjugatregeln säger att

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Regeln gäller eftersom

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2,$$

där vi använde oss av den kommutativa lagen som säger att $ab = ba$.

Exempel 1.52. *Skriv om uttrycket* $(2x + y)(2x - y)$ *med hjälp av konjugatregeln.*

Lösningsförslag: Vi tillämpar konjugatregeln och får

$$(2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2.$$

★

Sammanfattningsvis har vi följande räkneregler:

Första kvadreringsregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Andra kvadreringsregeln: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Konjugatregeln: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exempel 1.53. *Förkorta uttrycket*

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1}$$

så långt som möjligt.

Lösningsförslag: Vi ser att alla termer i täljaren innehåller x, varför vi kan bryta ut x ur täljaren. Vi får:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1}.$$

Första kvadreringsregeln kan användas på täljaren och konjugatregeln kan användas på nämnaren. Vi får att

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)}.$$

Därefter letar vi efter gemensamma faktorer i uttrycket. Vi ser att $(2x + 1)$ är en faktor i både täljare och nämnare, det innebär att vi kan förkorta med $(2x + 1)$. Detta ger oss

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)}.$$

Hur vet vi då att vi är klara? Jo, både täljare och nämnare är faktoriserade så långt som möjligt och vi kan inte hitta några fler gemensamma faktorer. ★

1.9.3 Förenkling av bråk där täljare och nämnare är komplexa tal

En tillämpning av konjugatregeln är att skriva om bråk av komplexa tal. Om $z = x+iy$, så definierar vi *konjugatet* till z som $x - iy$. Detta betecknar vi med $\bar{z}$. Låt oss använda konjugatregeln för att multiplicera ihop z och dess konjugat. Vi får

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - (i)^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

Produkten av de två komplexa talen z och $\bar{z}$ är alltså ett positivt *reellt* tal.

Exempel 1.54. *Låt $z = 4 + i$. Då är $\bar{z} = 4 - i$ och $z \cdot \bar{z} = 4^2 + 1^2 = 17$.*

Låt nu z vara ett nollskilt komplext tal och skriv $z = a + bi$. Vi ska visa hur man kan skriva om $1/z$ på formen $c + di$, där c och d är reella tal. Idén är att förlänga bråket $1/z$ med konjugatet till z.

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{(a^2 + b^2)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Vi har alltså lyckats skriva $1/z$ på formen $c + di$ där $c = a/(a^2 + b^2)$ och $d = -b/(a^2 + b^2)$.

Exempel 1.55. *Skriv $1/(2 + 3i)$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal.*

Lösningsförslag: Konjugatet till $2 + 3i$ är $2 - 3i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i.$$

★

Nästa exempel visar att vi även kan skriva ett komplext tal z/w på formen $a + bi$.

Exempel 1.56. *Skriv $(4 + i)/(1 + \sqrt{2}i)$ på formen $a + bi$.*

Lösningsförslag: Konjugatet till nämnaren $1 + \sqrt{2}i$ är $1 - \sqrt{2}i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\frac{4 + i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{(4 + i)(1 - \sqrt{2}i)}{(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)} = \frac{4 + i - 4\sqrt{2}i - \sqrt{2}i \cdot i}{1 - (\sqrt{2}i)^2}$$

$$= \frac{4 + i - 4\sqrt{2}i + \sqrt{2}}{1 - (-2)} = \frac{4 + \sqrt{2} + (1 - 4\sqrt{2})i}{3} = \frac{4 + \sqrt{2}}{3} + \frac{1 - 4\sqrt{2}}{3} i.$$

★

Övningar

1. Beräkna $1002 \cdot 998$. Tips: Använd konjugatregeln.

2. Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.

   (a) $\dfrac{x + x^2 + xy}{1 + x + y}$

   (b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

   (c) $\dfrac{25 - x^2}{x - 5}$

3. Låt $z = 3 + 4i$. Beräkna $z \cdot \bar{z}$.

4. Skriv $(4 + i)/(1 - i)$ på formen $a + bi$.

2 Algebra, kombinatorik och logik

I detta andra kaptitel börjar vi med att behandla polynom. Vi går noggrant igenom lösningsmetoder för polynomekvationer av grad 2 och går sedan igenom divisionsalgoritmen och faktorsatsen för polynom. Vi ger också en metod för att finna rationella lösningar till en viss typ av polynomekvationer. I avsnittet om kombinatorik kommer läsaren att få bekanta sig med hur man löser problem av typen "*På hur många sätt...*". Kapitlet avslutas med ett kort avsnitt om logik.

2.1 Polynom och polynomekvationer

En *förstagradsekvation* eller en *linjär ekvation* är en ekvation som kan skrivas på formen $ax + b = 0$ där a och b är konstanter och $a \neq 0$. Ett sådant uttryck kallas för ett linjärt uttryck eftersom variabeln x förekommer med högsta exponent ett.

En förstagradsekvation kan skrivas på många sätt. Till exempel är

$$4x - 2 = x + 7$$

en förstagradsekvation. Detta eftersom vi kan dra bort 7 från båda leden, få

$$4x - 9 = x$$

och sedan subtrahera x från båda leden för att få

$$3x - 9 = 0,$$

vilket är en ekvation på formen $ax + b = 0$. Lösningen till en förstagradsekvation $ax + b = 0$ är som vi tidigare sett $x = -b/a$ vilket vi får efter att ha flyttat över b till högersidan och sedan dividerat båda leden i ekvationen med a.

Lösningen till ekvationen

$$3x - 9 = 0$$

är alltså lika med 3.

Vi kan verifiera att detta svar är korrekt genom att testa om $x = 3$ uppfyller den ursprungliga ekvationen. Detta görs genom att sätta in $x = 3$ i både vänster- och högerled och sedan kontrollera att det blir samma tal. I vårt fall blir vänsterledet $4 \cdot 3 - 2 = 10$ och högerledet $3 + 7 = 10$, så lösningen är korrekt. Denna kontroll kallas för *insättning* och bör alltid genomföras för att se att man räknat rätt.

En *andragradsekvation* har den allmänna formen $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är konstanter och $a \neq 0$. På liknande sätt har en *tredjegradsekvation* den allmänna formen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, där a, b, c och d är konstanter och $a \neq 0$. Innan vi generaliserar detta till högre grad så introducerar vi begreppet *polynom*.

2.1.1 Polynom

Ett polynom $p(x)$ av *grad* n i en variabel x är ett uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_n \neq 0$ och där n är ett naturligt tal. Polynomets *koefficienter* är a_j:na. Dessa är tal, de kan vara reella tal, komplexa tal eller heltal — vilket man nu bestämmer sig för.

Exempel 2.1. *$p(x) = 2x^5 - 1$ är ett polynom med heltalskoefficienter av grad fem och $q(x) = \sqrt{2}$ är ett polynom av grad noll med reella koefficienter.*

Man kan givetvis döpa variabeln till något annat än x. Vanliga bokstäver förutom x är t, y och z.

Multiplicerar man ett polynom i x av grad n med ett annat annat polynom i x av grad m så kommer det resulterande polynomet att ha grad $m + n$.

Exempel 2.2. *Polynomet* $(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1)$ *har grad fem eftersom* $3 + 2 = 5$. *Lås oss verifiera detta genom att utföra beräkningen.*

$$\begin{aligned}(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1) &= x^3 \cdot (x^2 + x + 1) + x \cdot (x^2 + x + 1)\\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x,\end{aligned}$$

vilket mycket riktigt är ett polynom av grad fem.

Vad händer då med graden vid addition eller subtraktion av två polynom? Graden av summan eller differensen av två polynom kan aldrig bli större än graden av det polynom som har högst grad. Men vad gradtalet blir beror faktiskt på hur koefficienterna ser ut.

Om högstagradskoefficienterna till exempel tar ut varandra så sänks onekligen det resulterande polynomets grad.

Exempel 2.3. *Polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (8x^4 - 7x^3 - x) = 5x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

har grad 5, *polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (-5x^5 + x^2) = 3x^2 + 1$$

har grad 2 *och polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) - (5x^5 + 2x^2) = 1$$

har grad 0.

2.1.2 Polynomekvationer

Om vi har ett polynom $p(x)$ så är $p(x) = 0$ en så kallad *polynomekvation*. När $p(x)$ är ett förstagradspolynom så säger vi att $p(x) = 0$ är en *förstagradsekvation*. Och när vi har ett andragradspolynom $q(x)$ så säger vi att $q(x) = 0$ är en *andragradsekvation*.

I allmänhet säger vi att en n:te-gradsekvation är en ekvation $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom av grad n.

Vi har tidigare sett att en anledning till att införa de rationella talen är för att kunna lösa förstagradsekvationen $ax + b = 0$, där a och b är heltal.

På samma sätt infördes de komplexa talen för att kunna lösa en godtycklig andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$. Som bekant har ju ekvationen $x^2 + 1 = 0$ inga reella lösningar, eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är minus ett.

Om $p(x)$ är ett polynom så är polynomets *rötter* samtliga lösningar till ekvationen $p(x) = 0$.

Observera skillnaden mellan begreppen polynom och ekvation. Ett polynom är ett algebraiskt uttryck på formen $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. En ekvation har alltid ett vänster- och ett högerled avdelat med ett likhetstecken. Polynomet $5x^2 + x + 1$ är alltså *inte* en ekvation. Däremot är $5x^2 + x + 1 = 0$ en ekvation, men inget polynom.
I vissa framställningar används begreppen *rot* och *lösning* synonymt. Låt $p(x)$ vara ett polynom och antag att $p(a) = 0$ för något a. I detta material säger vi att a är en rot till polynomet $p(x)$ och att a är en lösning till ekvationen $p(x) = 0$. En rot hör alltså till ett polynom och en lösning hör till en ekvation. Polynomet $x^2 - 1$ har rötterna ± 1 och ekvationen $x^2 - 1 = 0$ har lösningarna ± 1.

2.1.3 Lösningen till en andragradsekvation med reella koefficienter

Vi löser en andragradsekvation med reella koefficienter genom så kallad *kvadratkomplettering*. Lösningsmetoden är ett exempel på en matematisk *algoritm*. Vi börjar med att betrakta ekvationen

$$x^2 - a = 0, \tag{2.1.1}$$

som kan skrivas om till

$$x^2 = a.$$

Om a är större än eller lika med noll är lösningarna till ekvationen lika med $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$ eftersom $\sqrt{a}^2 = a$ och $(-\sqrt{a})^2 = a$. När $a = 0$ gäller det förstås att $\sqrt{a} = -\sqrt{a} = 0$.

Exempel 2.4. *Ekvationen $x^2 - 16 = 0$ har lösningarna $\sqrt{16} = 4$ och $-\sqrt{16} = -4$.*

Om a är mindre än noll finns det också två lösningar, dessa är $i \cdot \sqrt{-a}$ och $-i \cdot \sqrt{-a}$, eftersom $(i\sqrt{-a})^2 = i^2(\sqrt{-a})^2 = -(-1) \cdot a = a$ och $(-i\sqrt{-a})^2 = (-i)^2 \cdot (\sqrt{-a})^2 = -1 \cdot (-a) = a$. (Notera att om a är mindre än noll så är $-a$ ett positivt tal, så det som står innanför rottecknet är positivt.)

Exempel 2.5. *Ekvationen $x^2 + 5 = 0$ har lösningarna $i\sqrt{5}$ och $-i\sqrt{5}$.*

En generell andragradsekvation löser vi genom att återföra till ekvation 2.1.1 ovan.
Säg till exempel att vi vill lösa ekvationen

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Vi börjar med att addera 3 på båda sidor av ekvationen och får

$$x^2 + 2x = 3.$$

Vi ska nu kvadratkomplettera vänsterledet. Detta innebär att vi i uttrycket $x^2 + 2x$ som innehåller både en x^2-term och en x-term samlar dessa båda i en gemensam kvadrat. I detta fallet får vi termerna x^2 och $2x$ via kvadraten

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Låt oss gå tillbaka till vår ekvation. Om vi lägger till 1 på båda sidor får vi

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1,$$

det vill säga

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Nu har vi lyckats återföra vår urspungliga ekvation på samma form som ekvation 2.1.1. I vänsterledet har vi ett uttryck vars kvadrat är 4. De tal vars kvadrat är 4 är talen $-\sqrt{4}$ och $\sqrt{4}$, vilket kort skrivs $\pm\sqrt{4}$. Alltså har vi att

$$(x + 1) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Vi subtraherar ett från båda leden och får

$$x = -1 \pm 2,$$

vilket ger oss de två lösningarna $x = 1$ och $x = -3$. Båda dessa $x-$värden uppfyller ekvationen. Försäkra dig om att detta gäller genom insättning.

Kvadratkomplettering av ax^2+bx+c. Vi ska nu formalisera vad vi gjort i exemplet och ge en lösningsmetod för allmänna andragradsekvationer. Ett resultat av vår lösningsmetod är att vi bevisar den så kallade pq-formeln som brukar läras ut på gymnasiet för att lösa andragradsekvationer.

Betrakta polynomekvationen $ax^2+bx+c=0$, där $a \neq 0$. Eftersom a är skilt från noll kan vi dela båda sidor av ekvationen med a. Det gäller alltså att lösningarna till ekvationen

$$ax^2+bx+c=0$$

är desamma som lösningarna till ekvationen

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

När vi ska lösa en andragradsekvation räcker det därför att hitta en metod för att lösa ekvationer av typen

$$x^2+px+q=0.$$

Vi börjar med att dra bort q från båda sidorna och får då

$$x^2+px=-q.$$

Vi försöker nu samla x^2+px i en kvadrat. Vi ser att $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ stämmer överens med vänsterledet x^2+px så när som på konstanttermen $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

För att kompensera konstanttermen adderar vi denna till båda sidor av ekvationen. Således kan vi skriva om vår ekvation som

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Nu kan vi skriva vänsterledet som en kvadrat och vi får

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Om högerledet är större än eller lika med noll är denna ekvation uppfylld precis då

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Genom att subtrahera $\frac{p}{2}$ från båda leden får vi lösningarna

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Om högerledet är negativt är ekvationen uppfylld precis då

$$x+\frac{p}{2}=\pm i\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Genom att subtrahera $\frac{p}{2}$ från båda leden får vi lösningarna

$$x=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Denna formel brukas kallas pq-formeln. Det är inte rekommenderat att lära sig denna formel utantill. Övningarna som följer använder sig av pq-formeln för att läsaren ska känna igen sig från gymnasiestudierna, men läsarens fokus bör vara på att förstå lösningsförslagen med kvadratkomplettering.

Exempel 2.6. *Lös andragradsekvationen* $x^2 + x - 2 = 0$ *med hjälp av pq−formeln och sedan med hjälp av kvadratkomplettering. Kontrollera lösningarna genom insättning.*

Lösningsförslag 1: Vi sätter in $p = 1$ och $q = -2$ i formeln och får att

$$x = -1/2 \pm \sqrt{(-1/2)^2 - (-2)} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2} = -1/2 \pm \sqrt{9/4} = -1/2 \pm 3/2,$$

vilket ger $x = 1$ och $x = -2$. Vi kontrollerar sedan att vi har räknat rätt genom insättning och får $1^2 + 1 - 2 = 0$ samt $(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$. ★

Lösningsförslag 2: Vi skriver om ekvationen som $x^2 + x = 2$ och samlar $x^2 + x$ i kvadraten

$$(x + 1/2)^2 = x^2 + x + 1/4,$$

där $1/2$ i parentesen är vald som halva koeffiecienten framför x-termen. Genom att lägga till $1/4$ på båda sidor i ekvationen får vi

$$x^2 + x + 1/4 = 2 + 1/4$$

som vi kan skriva om till

$$(x + 1/2)^2 = 9/4.$$

De tal vars kvadrat är lika med $9/4$ är $\pm 3/2$, alltså är $-1/2 \pm 3/2$ lösningar till vår urspungliga ekvation, det vill säga $x = 1$ och $x = -2$, vilket är samma lösningar som vi fick ovan.

★

Exempel 2.7. *Lös ekvationen* $3x^2 - 5x = 0$ *med hjälp av pq−formeln och sedan med kvadratkomplettering. Kontrollera lösningarna genom insättning.*

Lösningsförslag 1: Först dividerar vi hela ekvationen med konstanten 3 och får $x^2 - (5/3)x = 0$ som vi löser med *pq*-formeln (observera att $q = 0$):

$$x = \frac{5/3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5/3}{2}\right)^2} = \frac{5/3}{2} \pm \frac{5/3}{2}.$$

Det vill säga att $x = 5/3$ och $x = 0$ är ekvationens lösningar. Vi kontrollerar sedan att vi har räknat rätt genom insättning i den ursprungliga ekvationen. ★

Lösningsförslag 2: Vi delar båda sidor med tre och får $x^2 - (5/3)x = 0$. Vi samlar sedan $x^2 - (5/3)x$ i kvadraten

$$(x - 5/6)^2 = x^2 - 5/3x + 25/36.$$

Vi lägger till $25/36$ på båda sidor av ekvationen och får

$$x^2 - (5/3)x + 25/36 = 25/36,$$

det vill säga

$$(x - 5/6)^2 = 25/36.$$

De tal vars kvadrat är $25/36$ är $\pm 5/6$. Lösningarna är därför $5/6 \pm 5/6$, det vill säga $x = 5/3$ och $x = 0$. ★

Lösningsförslag 3: Det finns ett annat sätt att lösa ekvationen $3x^2 - 5x = 0$. Vi noterar att $3x^2 - 5x = x(3x - 5)$. Om detta uttryck ska vara lika med noll så måste antingen x vara noll eller så måste $(3x - 5)$ vara noll, vilket ger lösningarna 0 och $5/3$. Vi har *faktoriserat* ekvationen $3x^2 - 5x$. Mer om detta i nästa avsnitt. ★

Exempel 2.8. *Lös ekvationen $x^2 + x + 1 = 0$ med pq-formeln och med kvadratkomplettering.*

Lösningsförslag 1:
Från pq-formeln får vi $x = -1/2 \pm i\sqrt{-((1/2)^2 - 1)} = -1/2 \pm i\sqrt{3/4}$. Vi har att

$$\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2,$$

så $x = (-1 + i\sqrt{3})/2$ och $x = (-1 - i\sqrt{3})/2$ är våra lösningar.

★

Lösningsförslag 2: Vi skriver om ekvationen som $x^2 + x = -1$ och sedan som

$$(x + \frac{1}{2})^2 = -1 + \frac{1}{4}$$

via kvadratkomplettering, det vill säga

$$(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}.$$

De tal vars kvadrat är $-3/4$ är $i\sqrt{3}/2$ och $-i\sqrt{3}/2$. Det gäller alltså att

$$x + 1/2 = \pm i\sqrt{3}/2.$$

Lösningarna blir $x = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ och $x = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. ★

En förstagradsekvation har exakt en lösning, medan en andragradsekvation har som mest två lösningar. Ibland kan en andragradsekvation bara ha en lösning, till exempel har $x^2 = 0$ bara lösningen $x = 0$. Som vi tidigare har sett finns det andragradsekvationer som saknar lösningar över de reella talen, till exempel $x^2 + 1 = 0$, men då finns alltid två komplexa lösningar. I allmänhet gäller det att en n:te-gradsekvation har som mest n lösningar.

Kuriosa 6. *Det finns lösningsformler även för polynomekvationer av grad tre och fyra, men de är komplicerade. För godtyckliga polynomekvationer av grad fem eller högre saknas lösningsformler som bara innehåller de fyra räknesätten och rotutdragningar. Detta visades av norrmannen Niels Henrik Abel (1802-1829).*

2.1.4 Linjära ekvationssystem

Det ska ordnas en fisketävling och man vill belöna både kvantitet och kvalitet. Man bestämmer sig för att utdela 20 poäng per fisk och 10 poäng per hekto.

En tävlande som fått 3 abborrar med vikterna tre, två, och fem hekto får alltså $3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 160$ poäng, medan en tävlande som endast får en tvåhektosfisk får $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40$ poäng.

Låt oss nu betrakta det omvända problemet. Låt oss anta att vi känner till vikten och antalet fiskar och det sammanlagda antalet poäng för två tävlande, men att vi inte vet hur många poäng det delas ut per fisk och inte heller hur mycket man får per hekto.

Säg till exempel att två fiskare båda har fått 20 poäng, att den första fiskaren har fångat 1 abborre om 4 hekto, och att den andra fiskaren fångat 2 abborrar om sammanlagt 3 hekto. Hur många poäng får då en fiskare som fångat 4 abborrar om sammanlagt ett kilo?

Låt oss anta att det delas ut a poäng per fisk och b poäng per hekto. Informationen om fiskare 1 ger oss att

$$1 \cdot a + 4 \cdot b = 20$$

och informationen om fiskare 2 ger oss att

$$2 \cdot a + 3 \cdot b = 20.$$

Detta ger upphov till ett *linjärt ekvationssystem* i variablerna a och b som vi skriver som

$$\begin{cases} a + 4b = 20 \\ 2a + 3b = 20. \end{cases}$$

Med linjärt i a och b menas att de obekanta a och b bara förekommer med exponent 1.

Vi löser ekvationssystemet genom *succesiv eliminering* av variabler. Från den första ekvationen löser vi ut a;

$$a = 20 - 4b.$$

Vi sätter in detta uttryck för a i den andra ekvationen och får

$$2(20 - 4b) + 3b = 20.$$

Detta är ett linjär ekvations i *en variabel* som har lösningen $b = 4$. (Verifiera detta.)

Sätter vi in detta värde på b i den första ekvationen får vi $a = 20 - 4 \cdot 4 = 4$. En fiskare som fångat 4 abborrar om sammanlagt ett kilo får alltså $4 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 56$ poäng.

Anmärkning: När man har hittat en lösning till ett linjärt ekvationssystem är det oftast enkelt att verifiera att lösningen är korrekt genom insättning i alla ekvationerna. Innan man blivit helt bekväm med den succesiva eliminationen uppmanas man att alltid verifiera sina lösningar.

Att succesivt eliminera variabler kan generaliseras till system med tre eller fler obekanta, och den teorin kommer läsaren att stöta på under sina första kurser på högskolan.

Övningar

1. Finn lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$, där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$
   (b) $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$
   (c) $p(x) = (3 - x)(4 + x)$
2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ a + 3b = 2 \end{cases}$$
3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$$
4. Låt $p(x) = 2x^2 + ax + b$ vara ett polynom. Bestäm a och b så att $p(-3) = 6$ och $p(1) = 7$.

2.2 Faktorsatsen och polynomdivision

Liksom med vanliga tal kan man också dividera polynom med varandra. I det här avsnittet ska vi undersöka hur detta går till. Precis som för heltalsdivision kommer vi att använda begreppen *kvot* och *rest*.

2.2.1 Polynomdivision

Om vi vill dividera polynomet $p(x)$ med polynomet $q(x)$ kan vi på motsvarande sätt som i kapitlet 1.2.3 skriva

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Polynomet $g(x)$ kallas för kvoten, polynomet $r(x)$ är restpolynomet och polynomet $q(x)$ kallas för divisorspolynomet. Genom att kräva att graden på $r(x)$ ska vara mindre än graden på divisorn $q(x)$ så blir framställningen

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

unik.

Om $r(x) = 0$ kallas det för nollpolynomet. Om detta är fallet gäller det att $p(x)$ är *delbart* med $q(x)$ och att polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ går jämnt ut.

2.2.2 Divisionsalgoritmen för polynom

Låt oss nu gå igenom divisionsalgoritmen för polynom. Metoden illustreras lättast genom ett konkret exempel.

Exempel 2.9. *Dividera $p(x)$ med $q(x)$ där $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$ och $q(x) = x^2 + 4$. Vad blir kvoten och vad blir resten?*

Lösningsförslag: Vi vill finna $g(x)$ och $r(x)$ så att $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ och där $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$.

Vi börjar med att eliminera tredjegradstermen i $p(x)$ genom att dra bort en lämplig ”multipel” av $q(x)$. Genom att multiplicera $q(x)$ med $2x$ får vi ett uttryck som överensstämmer med $p(x)$:s högsta term $2x^3$. Detta ger oss

$$p(x) - 2x \cdot q(x) = (2x^3 + x^2 + 2x + 6) - (2x^3 + 8x) = x^2 - 6x + 6,$$

det vill säga

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6).$$

För att vi ska vara klara måste graden av restpolynomet vara strikt mindre än divisorpolynomets grad. I vårt fall ska vi ha en rest med grad strikt mindre än 2, så vi måste fortsätta. Vi ser att

$$(x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot q(x) = (x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot (x^2 + 4) = -6x + 2,$$

det vill säga

$$(x^2 - 6x + 6) = 1 \cdot q(x) - 6x + 2$$

och nu kommer vi inte längre eftersom resten $-6x + 2$ har lägre grad än divisorn $x^2 + 4$. Jämför återigen med division av heltal. När resten blivit mindre än det man delar med kommer man inte längre.

Vi har alltså fått att

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6) = 2x \cdot q(x) + 1 \cdot q(x) - 6x + 2 = (2x + 1)q(x) - 6x + 2.$$

Det betyder att vi har funnit kvoten $g(x) = 2x + 1$ och resten $r(x) = -6x + 2$.

Man kan utföra polynomdivision med ”liggande stolen” eller ”trappan” om man så vill. Räkningarna vi utfört ovan kan sammanställas i trappan.

$$\begin{array}{r|c}
 & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
x^2 + 4 & 2x^3 + x^2 + 2x + 6 \\
\hline
 & -(2x^3 + 8x) \\
\cline{2-2}
 & x^2 - 6x + 6 \\
 & -(x^2 + 4) \\
\cline{2-2}
 & -6x + 2
\end{array}$$

Alltså är

$$2x^3 + x^2 + 2x + 6 = (2x + 1) \cdot (x^2 + 4) - 6x + 2.$$

★

Exempel 2.10. *Utför polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ där $p(x) = x^3 + 2x + 3$ och $q(x) = x + 1$.*

Lösningsförslag: Vi utför polynomdivisionen med hjälp av trappan. Vi ritar först upp stolen och placerar in $p(x)$ och $q(x)$.

$$\begin{array}{r|c} \hline x+1 & x^3 + 2x + 3 \end{array}$$

Nästa steg är att se hur många gånger x (från $x+1$) går i x^3 (från $x^3 + 2x + 3$), vilket är x^2 gånger. Vi drar därför bort $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ från $x^3 + 2x + 3$. Detta för vi in i trappan enligt nedan. Över stolen skriver vi x^2 för att komma ihåg att vi dragit bort $x^2(x + 1)$.

$$\begin{array}{r|c} & x^2 \\ \hline x+1 & x^3 + 2x + 3 \\ & -(x^3 + x^2) \\ \hline & -x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

Vi har alltså gjort oss av med högstagradstermen i $x^3 + 2x + 3$, och skrivit $x^3 + 2x + 3 = x^2(x + 1) + (-x^2 + 2x + 3)$. Vi är inte klara ännu eftersom resten, $-x^2 + 2x + 3$, har högre grad än $x + 1$. Det vi vill göra nu är att utföra en polynomdivision mellan $-x^2 + 2x + 3$ och $x + 1$, så vi fortsätter på samma sätt. I nästa steg vill vi alltså få bort x^2-termen. Vi kontrollerar därför hur många gånger x går i $-x^2$, vilket är $-x$ gånger. Vi subtraherar $-x(x+1)$ från $-x^2+2x+3$, detta inför vi i trappan enligt nedan.

$$\begin{array}{r|c} & x^2 - x \\ \hline x+1 & x^3 + 2x + 3 \\ & -(x^3 + x^2) \\ \hline & -x^2 + 2x + 3 \\ & -(-x^2 - x) \\ \hline & 3x + 3 \end{array}$$

Slutligen vill vi utföra en polynomdivision av $3x + 3$ med $x + 1$. Vi får

$$\begin{array}{r|c} & x^2 - x + 3 \\ \hline x+1 & x^3 + 2x + 3 \\ & -(x^3 + x^2) \\ \hline & -x^2 + 2x + 3 \\ & -(-x^2 - x) \\ \hline & 3x + 3 \\ & -(3x + 3) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eftersom vi slutade med en nolla gick polynomdivisionen jämt ut. Vi har alltså fått fram att $x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$. ★

2.2.3 Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Om det finns en faktor $(x-a)$ i polynomet så kan man bryta ut denna faktor och skriva $p(x) = (x-a)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom av grad $n-1$. Vi ser då att a är en rot till $p(x)$ eftersom

$$p(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

oavsett värdet på $q(a)$.

Exempel 2.11. *Polynomet $p(x) = x^2 - 4$ kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln, det vill säga $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Alltså är 2 och -2 rötter till polynomet $p(x)$.*

Vi ska nu visa att även det omvända gäller, alltså att om a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$, för något polynom $p(x)$ av grad n, så måste $(x-a)$ vara en faktor i polynomet.

Vi börjar med att utföra polynomdivision på $p(x)$ med $(x-a)$. Från föregående kapitel vet vi att resten har grad mindre än det vi delar med, alltså får vi

$$p(x) = g(x)(x-a) + r(x),$$

där $g(x)$ är ett polynom av grad $n-1$ och $r(x)$ är ett polynom av grad noll. Eftersom ett polynom av grad noll är konstant så kan vi skriva det som $r(x) = k$. Detta betyder att $r(x)$ är lika med k oavsett värde på x.

Eftersom vi har antagit att a är en rot till $p(x)$, så är $p(a) = 0$. Sätter vi in detta i uttrycket ovan erhåller vi

$$0 = p(a) = g(a)(a-a) + r(a) = g(a) \cdot 0 + r(a) = r(a) = k.$$

Alltså är $k = 0$ och därmed har vi $p(x) = g(x)(x-a)$ så $(x-a)$ är en faktor i polynomet om a är en rot till $p(x) = 0$. Vi har således bevisat

Sats 6. *(Faktorsatsen) Uttrycket $(x-a)$ är en faktor i polynomet $p(x)$ om och endast om a är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$.*

Uttrycket *om och endast om* innebär *ekvivalens*, vilket betyder att vi har visat påståendet åt båda hållen: om a är en rot till $p(x) = 0$ så är $(x-a)$ en faktor i polynomet och om $(x-a)$ är en faktor i polynomet så är a en rot. Enligt faktorsatsen är alltså problemet att finna lösningar till en polynomekvation ekvivalent med problemet att finna förstagradsfaktorer i ett polynom.

Exempel 2.12. *Polynomet $p(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x$ är delbart med faktorn $(x-1)$ eftersom 1 är en rot till polynomet. Även 0 är en rot till $p(x)$ och alltså är $p(x)$ delbart även med $(x-0) = x$.*

Exempel 2.13. *Låt $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Lös tredjegradsekvationen $p(x) = 0$ med hjälp av faktorsatsen.*

Lösningsförslag: Om vi kan finna en heltalsrot till $p(x)$ genom att prova oss fram, så kan vi därefter utföra polynomdivision med motsvarande faktor för att därefter lösa den andragradsekvation vi då får. Vi ser att $x = 2$ är en lösning till ekvationen eftersom $p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$. Det betyder enligt faktorsatsen att $(x-2)$ är en faktor i polynomet, vilket innebär att polynomet är delbart med $(x-2)$. Med polynomdivision, vars steg vi inte redovisar här, får vi $p(x) = (x-2)(x^2 - x - 2)$ och ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ är en vanlig andragradsekvation med lösningarna $x = -1$ och $x = 2$. Således har vår ekvation lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ där den senare är en dubbelrot. Polynomet kan därför skrivas som $p(x) = (x+1)(x-2)^2$. ★

Exempel 2.14. *Man vet att 1 och 3 är rötter till polynomet $x^2 + ax + b$. Bestäm a och b.*

Lösningsförslag: Enligt faktorsatsen gäller det att $(x-1)(x-3) = x^2 + ax + b$, det vill säga $x^2 - 4x + 3 = x^2 + ax + b$. Alltså måste $a = -4$ och $b = 3$.

★

2.2.4 Hur man finner rationella rötter

Oftast är det omöjligt att gissa sig till en rot till ett polynom $p(x)$. Men det finns ett enkelt resultat som gör det möjligt att finna eventuella *rationella rötter* till $p(x)$ då polynomet har heltalskoefficienter. Vi visar hur detta resultat fungerar med ett exempel.

Exempel 2.15. *Låt $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Finn alla rationella rötter till polynomet $f(x)$.*

Lösningsförslag: Vi antar att vi har en rationell rot $\frac{p}{q}$ till polynomet $f(x)$, där $\frac{p}{q}$ är ett maximalt förkortat bråk. Då gäller att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 11\frac{p}{q} - 6 = 0.$$

Om vi multiplicerar uttrycket med q^3 får vi

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Vi adderar sedan $6q^3$ till båda sidor så att

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 = 6q^3.$$

Genom att bryta ut p i vänsterledet erhålls

$$p(p^2 - 6pq + 11q^2) = 6q^3.$$

Eftersom vänsterledet här är delbart med p måste även högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer vilket innebär att p *måste* dela 6. Möjliga värden på p blir därför $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ och ± 6.

På samma sätt kan vi hitta möjliga värden på q. Vi gör detta genom att subtrahera p^3 från båda led i ekvationen

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0,$$

vilket ger

$$-6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = -1 \cdot p^3.$$

Vi bryter ut q i vänsterledet och får

$$q(-6p^2 + 11pq - 6q^2) = -1 \cdot p^3.$$

Vi ser att vänsterledet är delbart med q och därför måste också högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer vilket innebär att q måste dela -1. Vi får alltså de möjliga värderna ± 1 för q. Kombinerar vi alla värden på p och q får vi

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{1} = 1, & \frac{1}{-1} = -1, & \frac{-1}{1} = -1, & \frac{-1}{-1} = 1, \\
\frac{2}{1} = 2, & \frac{2}{-1} = -2, & \frac{-2}{1} = -2, & \frac{-2}{-1} = 2, \\
\frac{3}{1} = 3, & \frac{3}{-1} = -3, & \frac{-3}{1} = -3, & \frac{-3}{-1} = 3, \\
\frac{6}{1} = 6, & \frac{6}{-1} = -6, & \frac{-6}{1} = -6, & \frac{-6}{-1} = 6,
\end{array}$$

det vill säga $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ och ± 6 är de möjliga rationella lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$. Låt oss testa lösningarna genom insättning. Vi får

$$f(-1) = -24, \quad f(1) = 0, \quad f(-2) = -60, \quad f(2) = 0, \quad f(-3) = -120,$$
$$f(3) = 0, \quad f(-6) = -504 \quad \text{och} \quad f(6) = 60.$$

Alltså är $1, 2$ och 3 rötter till polynomet $f(x)$.

★

Mer allmänt gäller följande sats.

Sats 7. *Låt* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *vara ett polynom med heltalskoefficienter. Om* p/q *är en rot till* $f(x)$*, där* p/q *är förkortat så långt som möjligt, så måste* p *vara en faktor i* a_0 *och* q *en faktor i* a_n*.*

Vi utelämnar beviset, men det utförs i princip på samma sättt som vi resonerade i exemplet tidigare.

Exempel 2.16. *Låt* $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$*. Finn alla rationella lösningar till ekvationen* $f(x) = 0$*.*

Lösningsförslag: Om polynomet har en rationell rot p/q, maximalt förkortad, så måste det gälla att q är en faktor till koefficienten framför x^3 (som är 1) och att p är en faktor till den konstanta termen (som också är 1). Alltså är de enda möjliga lösningarna

$$(-1)/(-1) = 1/1 = 1 \text{ och } 1/(-1) = (-1)/1 = -1.$$

Insättning ger

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 \neq 0$$

och

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

Alltså är -1 den enda rationella roten till polynomet $f(x)$.

★

Exempel 2.17. *Låt* $f(x) = 8x^5 + 2x + 6$*. Visa att ekvationen* $f(x) = 0$ *saknar rationella lösningar.*

Lösningsförslag: Om $f(x)$ har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till 8 och att p är en faktor till 6. Möjliga värden på q är därför $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ och möjliga värden på p är $\pm1, \pm2 \pm 3, \pm6$. Detta ger

$$\pm1, \quad \pm2, \quad \pm3, \quad \pm6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{4}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{3}{4}, \quad \pm\frac{1}{8}, \quad \pm\frac{3}{8}$$

som möjliga lösningar. Läsaren kan verifiera genom insättning att inget av dessa rationella tal är en lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Alltså saknar ekvationen $f(x) = 0$ rationella lösningar. ★

Övningar

1. Utför polynomdivisionerna $p(x)/q(x)$ där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$ och $q(x) = x - 1$,
   (b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ och $q(x) = x^2 + 3$,
   (c) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 7$ och $q(x) = x^2 - 3x - 1$,
   (d) $p(x) = x^3 + 1$ och $q(x) = x^2 - x + 1$,
   (e) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$ och $q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.
   (f) $p(x) = x^5$ och $q(x) = x^6$.
2. Visa med hjälp av faktorsatsen (utan att utföra polynomdivision) att $p(x) = x^3 - 6x + 4$ är delbart med $(x - 2)$.

3. Lös ekvationen $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ med hjälp av faktorsatsen.
4. Finn alla heltalslösningar till ekvationen $x^4 - 2^5x^2 + 9 = 0$.
5. Bestäm de värden på konstanten k för vilka polynomet $p(x) = x^3 - kx + k^2$ är delbart med $(x + 2)$ och ange kvoten.
6. Finn alla rationella rötter till $8x^3 + 2x^2 - x - 1$.
7. Finn alla lösningar till ekvationen $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$.

2.3 Kombinatorik

Kombinatorik är den del av matematiken där man bland annat pratar om olika sorters urval och svarar på frågor om på hur många sätt dessa kan göras.

2.3.1 Multiplikationsprincipen

Vi börjar avsnittet genom att förklara multiplikationsprincipen med ett exempel.

Exempel 2.18. *Anna har tre tröjor och fyra par byxor. På hur många olika sätt kan hon klä sig?*

Lösningsförslag: Valet av tröja är *oberoende* av valet av byxor. Vilken tröja Anna ska ha på sig kan hon välja på tre sätt och byxorna hon ska ha på sig kan hon välja på fyra sätt. För varje val av tröja finns fyra val av byxor. Anna kan klä sig på $3 \cdot 4$ sätt. ★

Mer allmänt gäller:

Antag att vi ska göra k val oberoende av varandra och att det i:te valet kan göras på m_i sätt. Då är det totala antalet valmöjligheter enligt multiplikationsprincipen

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_{k-1} \cdot m_k.$$

Exempel 2.19. *Stryktips går ut på att man gissar hur 13 fotbollsmatcher slutar (vinst, förlust eller oavgjort). Hur många möjliga stryktipsrader finns det?*

Lösningsförslag: Varje rad kan tippas på tre sätt och alla rader är oberoende av varandra. Enligt multiplikationsprincipen finns

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13} = 1594323$$

stryktipsrader. Vi använde alltså multiplikationsprincipen med $k = 13$ och $m_1 = m_2 = \ldots = m_{13} = 3$. Detta var alltså ett *specialfall* av multiplikationsprincipen då alla m_i :n var lika. ★

I Kapitel 1 studerade vi begreppet positiv delare till naturliga tal. Vi såg bland annat att 520, som kan primtalsfaktoriseras som $2^3 \cdot 5 \cdot 13$, hade 16 positiva delare. Vi såg även att delarna till 520 är på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. För exponenten a har vi alltså fyra val (0,1,2,3) och för exponenterna b och c har vi två val $(0, 1)$ var. Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare därför lika med $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Exempel 2.20. *Bestäm antalet positiva delare till talet 516.*

Lösningsförslag: Vi har $516 = 2 \cdot 258 = 2 \cdot 2 \cdot 129 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 43 = 2^2 \cdot 3 \cdot 43$. Antalet delare är därför $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. ★

Exempel 2.21. *Bestäm antalet positiva delare till talet* $2^5 \cdot 3^4 \cdot 17^9$.

Lösningsförslag: Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare lika med $6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$. ★

2.3.2 Permutationer

En *permutation* är en omordning av en uppsättning olika objekt. En permutation tar hänsyn till i vilken ordning objekten kommer och varje objekt får endast vara med en gång.

Exempelvis är abc och bca olika permutationer av bokstäverna a, b och c. Så hur många permutationer av bokstäverna a, b och c finns det? Vi kan välja den första bokstaven på tre sätt, när vi har gjort detta val finns det två bokstäver kvar att välja bland. Vi kan välja en av dessa på två sätt och slutligen kan den tredje bokstaven "väljas" på ett sätt. Alltså finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutationer av $\{a, b, c\}$, nämligen

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Vi har här använt multiplikationsprincipen med $m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 1$.

På samma sätt kan vi beräkna antalet sätt att ordna de 52 korten i en kortlek. Det kan vi göra på $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt. För att slippa skriva ut den långa produkten inför vi nu en ny notation.

För varje positivt heltal k inför vi beteckningen $k!$ (k-*fakultet*) för talet

$$k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Heltalet $k!$ är alltså produkten av alla heltal mellan 1 och k. Vi definierar dessutom $0! = 1$ av praktiska skäl. I vårt kortleksexempel finns det alltså $52!$ sätt att ordna de 52 korten i en kortlek.

Exempel 2.22. *Beräkna 5!.*

Lösningsförslag: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$ ★

Exempel 2.23. *Hur många olika "ord" kan man bilda av bokstäverna i LUS (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi använder multiplikationsprincipen. Den första bokstaven kan väljas på 3 sätt, den andra på 2 och den tredje på 1 sätt. Det följer att vi kan bilda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ ord av bokstäverna i LUS. De olika orden är:

LUS, LSU, SLU, SUL ,ULS, USL.

Detta är förstås samma antal som antalet permutationer av bokstäverna a, b, c som vi beräknat tidigare. ★

Exempel 2.24. *På hur många sätt kan man bilda en kö av fyra personer?*

Lösningsförslag: Frågan handlar om att ordna fyra personer på rad. Det finns alltså $4! = 24$ olika sätt att göra detta på. ★

2.3.3 Ordnat urval

Man kan också tänka sig att man väljer ut en del av objekten att skapa permutationer av. Ett *ordnat urval* är en ordning av en del av de objekt man har till hands. En permutation är alltså ett specialfall av ett ordnat urval där man väljer ut *alla* objekt som finns till hands.

Exempel 2.25. *På hur många sätt kan man måla en flagga med tre olika färger (som Frankrikes flagga) om vi har tio färger att välja bland?*

Lösningsförslag: Vi har tre områden att måla. Första området kan målas med tio färger, det andra med en av de övriga nio och det sista området med åtta färger. Detta ger oss då totalt $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika flaggor. ★

Vi kan generalisera flaggexemplet och med hjälp av multiplikationsprincipen får vi att det finns

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

sätt att ordna k objekt från n objekt.

2.3.4 Ordnat urval med upprepning

Nu ska vi undersöka hur många ord vi kan bilda från en samling objekt som inte nödvändigtvis är unika.

Exempel 2.26. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i LUU (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Här blir det något annorlunda än tidigare eftersom vi har två likadana bokstäver. Om vi först bortser från detta vet vi enligt exemplet ovan att det finns 6 olika ord. Vi måste nu tänka på att vi ha två stycken U:n. Dessa kan i varje ord ordnas (inbördes byta plats) på två sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{3!}{2!} = 3$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord två gånger. De olika orden är:

LUU, ULU, UUL.

★

Exempel 2.27. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i ABCAA (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Om vi först bortser från att vi har tre likadana bokstäver finns det $5! = 120$ olika ord. De tre A:n kan i vart och en av dessa 120 ord ordnas (inbördes byta plats) på $3! = 6$ sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{5!}{3!} = 20$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord sex gånger. ★

Exempel 2.28. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i SKATTKARTA (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi har 10 bokstäver som ska ingå i ordet. Hade de tio bokstäverna varit olika hade det funnits 10! olika ord. Men nu måste vi komma ihåg att vi har två K:n som i varje ord kan ordnas på 2! sätt, tre A:n som kan ordnas på 3! sätt och tre T:n som kan ordnas på 3! sätt. Detta innebär att vi räknade varje ord 2!3!3! gånger när vi antog att alla bokstäver var olika. Det följer att vi kan bilda

$$\frac{10!}{2!3!3!} \text{ ord.}$$

★

2.3.5 Oordnat urval

Med en *kombination* menas ett oordnat val av objekt från en uppsättning olika objekt. Exempelvis är adc och acd samma kombination av objekten a, b, c och d.

Exempel 2.29. *På hur många sätt kan vi välja ut tre personer ur en grupp med fem personer?*

Lösningsförslag: Här är det underförstått att man söker en kombination, eftersom det är en grupp personer som ska väljas, till skillnad från exemplet med flaggorna där ordningen spelade roll. Den första personen kan väljas på fem sätt, den andra på fyra och den tredje på tre sätt. Alltså kan vi göra ett ordnat urval på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt. Vi måste nu komma ihåg att för varje kombination av tre personer finns 3! permutationer varför vi måste dividera med sex. Varje kombination svarar alltså mot sex permutationer i detta fallet och svaret blir alltså $60/6 = 10$. De olika grupperna som kan bildas är

$$\{\text{P1, P2, P3}\}, \{\text{P1, P2, P4}\}, \{\text{P1, P2, P5}\}, \{\text{P1, P3, P4}\}, \{\text{P1, P3, P5}\}, \{\text{P1, P4, P5}\},$$

$$\{\text{P2, P3,P4}\}, \{\text{P2, P3, P5}\}, \{\text{P2, P4, P5}\}, \{\text{P3, P4, P5}\},$$

där P1 står för person ett, P2 för person två, och så vidare.

★

Hur många sätt finns det i allmänhet att oordnat välja k objekt från n objekt? Om vi hade tagit hänsyn till ordning hade det funnits

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

val. Eftersom en grupp av k personer kan ordnas på $k!$ sätt så kommer varje grupp av personer att förekomma $k!$ gånger när vi gör det ordnade urvalet. Vi får alltså det oordnade urvalet genom att dela med faktorn $k!$, vilket betyder att det finns

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

sätt att välja k objekt från n objekt oordnat.

Antalet sätt att välja k föremål av n möjliga dyker upp i många sammanhang och har därför fått en egen beteckning. Det betecknas

$$\binom{n}{k}$$

och kallas *binomialkoefficient*.

Genom att förlänga täljare och nämnare med $(n-k)!$ får vi likheten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Symbolen $\binom{n}{k}$ utläses ”n över k”.

Exempel 2.30. *Beräkna* $\binom{7}{3}$.

Lösningsförslag:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$$

Det finns alltså 35 sätt att välja ut tre personer från en grupp av sju. ★

Exempel 2.31. *En pokerhand innehåller fem av de 52 korten i en kortlek. Vad är det totala antalet pokerhänder?*

Lösningsförslag: Vi ska räkna ut antalet sätt att dra fem kort ur en kortlek innehållande 52 kort, utan att bry oss om i vilken ordning de dras. Med andra ord finns det $\binom{52}{5}$ olika pokerhänder. ★

Vi kan konstatera att

$$\binom{n}{k} \quad \text{och} \quad \binom{n}{n-k}$$

är samma tal. Att välja ut k av n är ju detsamma som att välja bort $(n-k)$ av n. Vi kan även visa detta algebraiskt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

2.3.6 Summasymbolen

Summasymbolen , $\sum$, införs för att man på ett mer kompakt sätt ska kunna skriva summan av ett större antal termer. Summasymbolen är den stora bokstaven sigma i det grekiska alfabetet. Om vi vill summera alla tal mellan 1 och 30 skulle vi kunna skriva det som

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+$$
$$17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30$$

vilket är omständligt. Med hjälp av summasymbolen kan man istället skriva detta som

$$\sum_{i=1}^{30} i$$

Detta läser man som *summan av alla tal i då i går från ett till trettio.*

Exempel 2.32. *Skriv* $3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11}$ *med hjälp av summasymbolen.*

Lösningsförslag: Vi summerar en massa trepotenser. Potenserna börjar på fyra och slutar på 11. Vi kan därför skriva

$$3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11} = \sum_{i=4}^{11} 3^i.$$

Ibland skriver man också $\sum_{i=4}^{11} 3^i$ för att spara plats. ★

2.3.7 Binomialsatsen och Pascals triangel

Vi vet sedan tidigare att

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

enligt kvadreringsregeln. Vi ska nu se vad som händer om vi har en annan exponent än två.

Exempel 2.33. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^3$.

Lösningsförslag: Användning av kvadreringsregeln ger att

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 \\
&= (x+y)(x^2+2xy+y^2) \\
&= (x+y)x^2 + (x+y)2xy + (x+y)y^2 \\
&= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{aligned}$$

Resultatet kallas *kubregeln*. ★

Exempel 2.34. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^4$.

Lösningsförslag: Användning av kubregeln ger att

$$\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 \\
&= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&= (x+y)x^3+(x+y)3x^2y+(x+y)3xy^2+(x+y)y^3 \\
&= x^4+x^3y+3x^3y+3x^2y^2+3x^2y^2+3xy^3+xy^3+y^4 \\
&= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.
\end{aligned}$$

★

En formel för att beräkna $(x+y)^n$ för ett godtyckligt positivt heltal n ges av *binomialsatsen.* Beviset utelämnas, men den intresserade läsaren uppmanas att försöka komma med ett eget bevis baserat på ett kombinatoriskt resonemang.

Sats 8. *(Binomialsatsen) För heltal* n *gäller det att*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Exempel 2.35. *Använd binomialsatsen för att utveckla* $(x+y)^3$.

Lösningsförslag: Vi använder summaformeln i binomialsatsen med $n=3$ och får:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Termerna framför x^3, x^2y, xy^2 och y^3 kallas binomialkoefficienter. ★

Exempel 2.36. *Bestäm koefficienten framför* x^4 *i polynomet* $(x+1)^6$.

Lösningsförslag: Med $y=1$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(x+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k} 1^k.$$

När k är 2 så är $x^{6-k} = x^4$. Alltså är koefficienten framför x^4 lika med $\binom{6}{2} \cdot 1^2 = 15$. ★

Exempel 2.37. *Bestäm koefficienten framför* x^3 *i polynomet* $(2+x)^6$.

Lösningsförslag: Med $y=2$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(x+2)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k} 2^k.$$

När k är 3 så är $x^{6-k} = x^3$. Alltså är koefficienten framför x^3 lika med $\binom{6}{3}2^3 = 20 \cdot 8 = 160$. ★

Exempel 2.38. *Bestäm koefficienten framför* x^8 *och koefficienten framför* x^{10} *i utvecklingen av* $(\frac{1}{x}+x^2)^{22}$. *Svaren behöver inte ges på uträknad form.*

Lösningsförslag: Enligt binomialsatsen gäller att

$$\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^{22}=\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{22-k}\cdot(x^2)^k.$$

Vi förenklar högerledet och får

$$\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{22-k}\cdot(x^2)^k=\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{-(22-k)}\cdot x^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{(-22+k)+2k}=\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{3k-22}$$

Eftersom

$$x^{3k-22}=x^8$$

precis då $3k-22=8$, det vill säga då $k=10$ innebär det att koefficienten framför x^8 är lika med $\binom{22}{10}$.

I fallet med koefficienten framför x^{10} så ger villkoret $x^{3k-22}=x^{10}$ istället ekvationen $3k-22=10$ som *saknar* heltalslösningar. Alltså är koefficienten framför x^{10} noll, vilket innebär att termen x^{10} inte förekommer i polynomet. ★

När vi utvecklar till exempel $(x+y)^2$ kan man direkt gissa att utvecklingen kommer innehålla termerna x^2, xy och y^2. Frågan är bara vilken koefficient vi får framför var och en av termerna. Man kan använda binomialsatsen för att ta reda på binomialkoefficienterna. *Pascals triangel* kan man se som en geometrisk framställning av binomialkoefficienterna. Namnet kommer från matematikern och fysikern Blaise Pascal. Toppen av Pascals triangel ser ut så här:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&\binom{0}{0}&&&&&\\
&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&\\
&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&\\
&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&\\
&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&\\
\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}
\end{array}$$

Om vi tittar på tredje raden ser vi att det är precis koefficienterna framför x^2, xy respektive y^2 i utvecklingen av $(x+y)^2$. På samma sätt finner vi binomialkoefficienterna för utvecklingen av $(x+y)^3$ på rad fyra och så vidare. Om vi räknar ut binomialkoefficienterna och ersätter dem med tal i Pascals triangel får toppen följande utseende.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&&\\
&&&&1&&1&&&&\\
&&&1&&2&&1&&&\\
&&1&&3&&3&&1&&\\
&1&&4&&6&&4&&1&\\
1&&5&&10&&10&&5&&1
\end{array}$$

Vi ser då att Pascals triangel är symmetrisk. Detta beror på att $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, som vi visat tidigare. För att förstå hur Pascals triangel är uppbyggd behöver vi en intressant egenskap hos binomialkoefficienterna, nämligen sambandet

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

Den intresserade läsaren uppmanas att fundera över hur man kan bevisa sambandet.

Längst ut i vänsterkanten på Pascals triangel finns alltid ett tal på formen $\binom{n}{0} = 1$ och i högerkanten ett tal på formen $\binom{n}{n} = 1$. Däremellan är alla binomialkoefficienter summan av de båda talen ovanför, snett till höger och snett till vänster. För att beräkna summan använder vi likheten ovan. Till exempel så har vi att $\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}$, det vill säga $2 = 1 + 1$.

Övningar

1. På hur många sätt kan man ordna en kö med sju personer?
2. Hur många ord kan man bilda av bokstäverna i MISSISSIPPI?
3. Vi ska måla ett slott, en villa och en koja i olika färger. Färgerna kan väljas bland orange, lila, rosa, röd och brun. På hur många sätt kan detta göras?
4. I en skolklass finns nio elever. På hur många sätt kan man välja ut tre av dem att delta i en tävling?
5. Beräkna
   (a) $\binom{7}{3}$ och
   (b) $\binom{12}{10}$.
6. Bestäm koefficienten framför x^9 och koefficienten framför x^{10} i utvecklingen av $(1/x^4 + x)^{30}$. Svaret behöver inte ges på uträknad form.
7. Summera de första raderna i Pascals triangel och se om du kan finna ett samband.
8. (*svår*) Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$. Ledning: Använd binomialsatsen för ett algebraiskt bevis, tänk på resultatet i föregående uppgift. Försök gärna också visa det kombinatoriskt. Då kan det vara bra att tänka på att 2^n är antalet strängar av längd n med bara ettor och nollor.

2.4 Logik

Logik handlar om påståenden och slutsatser man kan dra från dessa. Om man till exempel påstår att $x \geq 10$, så kan man direkt dra slutsatsen att $x \geq 0$. Däremot kan man inte vara säker på att $x \geq 0$ garanterar att $x \geq 10$. Talet x kan ju nämligen ligga mellan 0 och 10.

Sådana här slutsatser kallas *implikationer*. Om vi använder matematiska symboler, så blir påståendet ovan $x \geq 10 \Rightarrow x \geq 0$. Detta utläses ”Om x är större än eller lika med 10, så medför det att x är större än eller lika med 0” eller ”x större än eller lika med 10 implicerar att x är större än eller lika med 0”.

Ibland så händer det att två påståenden implicerar varandra. Detta kallas *ekvivalens* och innebär att båda påståendena har samma sanningsvärde samtidigt. Detta skrivs ganska naturligt som implikationspilar åt båda hållen, $\Leftrightarrow$. Ett exempel på ekvivalens är $x = 2 \Leftrightarrow x = 1 + 1$.

När man skriver om uttryck och ekvationer, så gäller det att uttrycket och ekvationen före och efter manipulationen är ekvivalenta. Vad som menas med ”ekvivalent” beror på vad man manipulerar. När det gäller polynom så säger man att två polynom är ekvivalenta om de har samma grad och samma rötter. Det gäller alltså att

$$5x + 4 = 3x + 9 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

eftersom $x = \frac{5}{2}$ är den enda lösningen till alla tre ekvationerna.

Men ekvationerna

$$(x-1)x = x \quad \text{och} \quad x - 1 = 1$$

är *inte* ekvivalenta, eftersom den vänstra ekvationen har 0 och 2 som lösningar, medan den högra endast har 2 som lösning. Däremot gäller det att

$$(x-1)x = x \Leftarrow x-1 = 1,$$

vilket betyder att den högra ekvationen implicerar den vänstra. Alla lösningar till den högra ekvationen är alltså lösningar till den vänstra.

Det är ett vanligt misstag att försöka lösa en ekvation av just typen

$$(x-1)x = x$$

genom att "dela med" x. Problemet är alltså att vi kan missa lösningar, i det här fallet lösningen $x = 0$, eftersom den uppkomna ekvationen skulle bli

$$x - 1 = 1$$

som har den enda lösningen $x = 2$.

En liknande situation får vi då vi betraktar rotekvationer. Ekvationen $\sqrt{x} = x - 2$ kan vi lösa genom att kvadrera båda led, vi får då $x = (x-2)^2$, eller $x = x^2 - 4x + 4$. Genom att använda kvadratkomplettering eller pq-formeln på $x^2 - 5x + 4 = 0$ får vi fram lösningarna $x = 4$ och $x = 1$. Men om vi sätter in den andra lösningen i vår urspungliga ekvation får vi $1 = -1$ vilket är en falsk utsaga. Lärdomen vi ska dra är att kvadrering av båda sidor av en ekvation kan ge oss *falska* lösningar. Anledningen till detta har att göra med att kvadrering eliminerar minustecken. Utsagan

$$-2 = 2$$

är givetvis falsk, men när vi kvadrerar båda led får vi

$$4 = 4,$$

vilket är en sann utsaga.

Däremot gäller, precis som ovan, att alla lösningar till $\sqrt{x} = x - 2$ också är lösningar till $x = (x-2)^2$, det vill säga

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2.$$

Exempel 2.39. *Lös ekvationen* $\sqrt{x} + 2x - 3 = 0$.

Lösningsförslag: Vi ställer rotutrycket ensamt i vänsterledet och kvadrerar sedan bägge led, vi får alltså att

$$\sqrt{x} + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (3-2x)^2.$$

Det högra uttrycket skrivs om till $9 - 13x + 4x^2 = 0$ vilket ger lösningarna $x = 1$ och $x = 9/4$ till den kvadratiska ekvationen. Vi testar lösningarna i den ursprungliga ekvationen genom insättning och finner att $9/4$ är en falsk lösning. ★

Så vilka operationer kan vi utföra på en ekvation och fortfarande ha ekvivalens? Vi kan utföra multiplikation och division med tal;

$$x^2 + x = 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (x^2 + x) = 2 \cdot (1 + 2x),$$

och vi kan utföra addition och subtraktion med tal och med polynom;

$$x^2 + x = 1 + 2x \Leftrightarrow (-2x - 1) + (x^2 + x) = (-2x - 1) + (1 + 2x).$$

Ibland behöver man säga att flera påståenden är sanna samtidigt, till exempel "det regnar *och* det blåser". I det logiska språket skriver man $\wedge$ när man menar *och*. Påståendet $x \geq 0 \wedge x \leq 0$

säger alltså att x är större än eller lika med noll, samtidigt som x är mindre än eller lika med noll. Den enda möjligheten är då att $x = 0$. Vi kan då sluta oss till att

$$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Om man istället vill att minst ett av påståendena ska vara sant, använder man *eller*, vars matematiska symbol är $\vee$. Som ett exempel får vi att påståendet

$$x > 3 \vee x < 2$$

är sant för alla x som antingen är mindre än två eller större än tre.

Övningar

1. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $x - \sqrt{x} = 3/4$.
2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{x} = -2$.
3. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{4x-8} + 2 = x$.
4. Bestäm vilka påståenden nedan som är sanna för $x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$
   (b) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
   (c) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
   (d) $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$

3 Funktionslära

Funktioner är matematiska objekt som klassiskt har använts för att modellera naturliga samband. Vi ska definiera funktioner med hjälp av mängdlära och sedan studera några vanliga typer av funktioner, bland annat polynomfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och trigonometriska funktioner. Vi går sedan över till teorin för derivator och integraler. Kapitlet innehåller dessutom viss teori för olikheter och ett mindre avsnitt om kurvritning.

3.1 Mängdlära

Begreppet mängd är fundamentalt i matematiken. Vi har redan stött på ett antal olika mängder, till exempel mängden av positiva heltal och mängden av rationella tal. En mängd är en samling objekt där varje objekt bara förekommer en gång. Objekten i en mängd kallas *element*. Vi skriver normalt en mängd inom måsvingar.

Ett exempel på en mängd är $\{1, 2, 3, 4, 100\}$, det vill säga mängden som innehåller talen 1, 2, 3, 4 samt 100. Ett annat exempel är $\{0, 1/2, 3, \pi, 4\}$. Mängder kan även innehålla symboler, till exempel är

$$\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

en mängd.

För att säga att ett element ingår i en mängd så använder vi symbolen $\in$.

Exempel 3.1. $1 \in \{1, 2, 3\}$, *men* $4 \notin \{1, 2, 3\}$.

För att säga att en hel mängd X ingår i en mängd Y så skriver vi $X \subset Y$. Detta utläses som att X är en *delmängd* till Y.

Exempel 3.2. $\{1, 2\} \subset \{0, 2, 5, 1\}$.

Observera alltså att det inte spelar någon roll i vilken ordning elementen står i. Självklart är varje mängd en delmängd till sig själv. Vi har alltså $X \subset X$ för alla mängder X.

Snittet av mängderna X och Y skrivs som $X \cap Y$ och är de element som ingår i både X och Y.

Exempel 3.3. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$.

Den tomma mängden som inte innehåller något element skrivs $\emptyset$.

Exempel 3.4. $\{a, b, c\} \cap \{d, e, f, g\} = \emptyset$.

Vill man däremot beskriva det som finns i minst en av mängderna, så är det *unionen* man är intresserad av. Detta skrivs $X \cup Y$ och denna mängd innehåller alla element som finns i minst en av mängderna.

Exempel 3.5. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Om X är en delmängd till Y och man vill beskriva de element som ligger i Y men inte i X så skriver man $Y \setminus X$. Man kan se det som att man subtraherar den ena mängden från den andra.

Exempel 3.6. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$.

Ett annat exempel är att de *irrationella talen* kan skrivas som $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

För att beskriva mängder kan man använda symbolen $|$ som avdelare och som ska utläsas sådana att". Mängden av alla jämna tal betecknas till exempel som

$$\{2 \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

vilket utläses ”mängden av alla tal på formen $2 \cdot a$, sådana att a tillhör mängden $\mathbb{Z}$”.

Vi kan ha fler krav på den högra sidan och som exempel ger vi mängden

$$\{a \mid a \in \mathbb{Q}, a \geq 2\}$$

som betecknar alla rationella tal större än eller lika med 2.

Övningar

1. Låt $X = \{1, 2, 4, 6, 10, 100\}$ och $Y = \{2, 5, 6, 10, 101\}$. Bestäm följande mängder:
   (a) $X \cup Y$
   (b) $X \cap Y$
   (c) $X \setminus (X \cap Y)$
2. Gäller det att
$$\mathbb{Q} = \{a/b \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}?$$

3.2 Funktionsbegreppet

När du tänker på en funktion så tänker du förmodligen på något i stil med $f(x) = x^2$. Kanske tänker du även på en graf för funktionen och då har du förutsatt att funktionen är definierad över de reella talen.

Med hjälp av mängder kan vi göra en mer precis definition av begreppet funktion.

Definition: Låt X och Y vara två icke-tomma mängder. Vi säger att f är en *funktion* från X till Y om f associerar varje element $a \in X$ med ett unikt element $b \in Y$. Om a associeras med b så skriver vi att $f(a) = b$ och vi säger att a avbildas på b eller att bilden av a är lika med b.

Exempel 3.7. *Låt* $X = \{a, b, c, d\}$ *och låt* $Y = \{1, 2, 3, 4\}$*. Låt*
$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3 \quad \text{och} \quad f(d) = 4.$$
Då blir f *en funktion från* X *till* Y *eftersom varje element i* X *avbildas på ett och endast ett element i* Y*.*

Exempel 3.8. *Låt* $X = \{a, b, c, d\}$ *och låt* $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ *och låt* f *vara en funktion från* X *till* Y*. Låt*
$$f(a) = 1, \quad f(a) = 2, \quad f(c) = 3 \quad \text{och} \quad f(d) = 4.$$
Då är f inte *en funktion från* X *till* Y *eftersom* $f(a)$ *inte är unikt bestämt.*

Exempel 3.9. *Låt* $X = \{a, b, c, d\}$ *och låt* $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ *och låt* f *vara en funktion från* X *till* Y*. Låt*
$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 1.$$
Då blir f *en funktion från* X *till* Y *eftersom varje element i* X *avbildas på ett och endast ett element i* Y*.*

3.2.1 Definitionsmängd, värdemängd och målmängd

När f är en funktion från X till Y så är X funktionens *definitionsmängd* och Y funktionens *målmängd* . Funktionens *värdemängd* är alla element i Y som är bilden av ett element i X. Värdemängden består alltså av alla element $b \in Y$ sådana att det finns ett a i X så att $f(a) = b$, det vill säga
$$\{b \,|\, b = f(a) \text{ för något } a \in X\}.$$

Vi skriver V_f för att beteckna värdemängden till f och D_f för att beteckna definitionsmängden till f. Värdemängden är en delmängd till målmängden Y, det vill säga
$$V_f \subset Y.$$

Att f är en funktion från X till Y skriver vi i fortsättningen som $f : X \to Y$

Exempel 3.10. *Låt oss återgå till Exempel 3.9. Definitionsmängden* D_f *är* $\{a, b, c, d\}$*, målmängden är* $\{1, 2, 3, 4\}$ *och värdemängden* V_f *är* $\{1\}$*.*

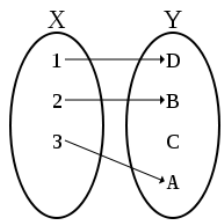
3.2.2 Begreppen surjektiv och injektiv

En funktion kan ha olika egenskaper och vi ska behandla begreppen *surjektiv* och *injektiv*.

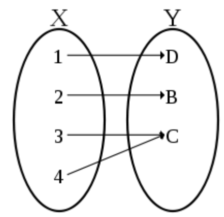
Om värdemängden är lika med målmängden säger vi att funktionen är surjektiv. I Exempel 3.7 träffas alla element i Y av f, vilket vi kan skriva som att $V_f = \{1, 2, 3, 4\} = Y$ och alltså är f surjektiv. I Exempel 3.10 är $V_f = \{1\}$ och alltså är f inte surjektiv.

En funktion f är *injektiv* om $a \neq b$ medför att $f(a) \neq f(b)$. Funktionen f i Exempel 3.7 är injektiv eftersom a, b, c, d alla avbildas på olika element. Men i Exempel 3.10 så avbildas både a och b på 1, och alltså är den funktionen inte injektiv.

Figur 2 och 3 illustrerar begreppen.



Figur 2: Funktion från definitionsmängden $X = \{1, 2, 3\}$ till målmängden $Y = \{A, B, C, D\}$, där $f(1) = D, f(2) = B, f(3) = A$. Värdemängden V_f är lika med $\{A, B, D\}$. Funktionen är injektiv men inte surjektiv, eftersom C ingår i målmängden men inte ligger i värdemängden.



Figur 3: Funktion från definitionsmängden $X = \{1, 2, 3, 4\}$ till målmängden $Y = \{B, C, D\}$, där $f(1) = D, f(2) = B, f(3) = C, f(4) = C$. Värdemängden V_f är lika med $\{B, C, D\}$. Funktionen är surjektiv men inte injektiv, eftersom $3 \neq 4$ men $f(3) = f(4)$.

Exempel 3.11. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$. Funktionen är inte injektiv eftersom både -1 och 1 avbildas på talet 1. Funktionen är inte heller surjektiv eftersom det inte finnas något reellt tal vars kvadrat är negativt. Värdemängden består av alla icke-negativa reella tal, vilket vi kan beteckna med $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Det är viktigt att förstå att begreppen surjektiv och injektiv hänger samman med vilken definitionsmängd och målmängd man väljer.

Exempel 3.12. *Låt $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$. Nu är funktionen injektiv eftersom det inte finns två icke-negativa tal vars kvadrat är lika. Värdemängden är precis som i föregående exempel $\mathbb{R}_{\geq 0}$, så funktionen är inte surjektiv.*

Exempel 3.13. *Låt $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, där $f(x) = x^2$. Denna funktion är både injektiv och surjektiv. Olika tal avbildas på olika tal och värdemängden är lika med målmängden ($\mathbb{R}_{\geq 0}$).*

Exempel 3.14. *Låt nu istället $f(x) = x^2$ vara en funktion definierad från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$. Då kommer värdemängden att vara $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$, det vill säga alla heltalskvadrater. Funktionen är inte surjektiv, men däremot är den injektiv eftersom $\mathbb{N}$ inte innehåller några negativa tal.*

Exempel 3.15. *Vi kan definiera en funktion* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *genom att låta varje heltal* a *svara mot heltalet* $2a$*, det vill säga* $f(a) = 2a$*. Denna funktion blir inte surjektiv eftersom vi aldrig kan "träffa" ett udda tal. Värdemängden innehåller alltså bara de jämna talen, vilken kan skrivas* $\{2 \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Exempel 3.16. *Låt* $Y = \{j, u\}$ *och definiera en funktion* $g : \mathbb{Z} \to Y$ *genom att låta*

$$g(a) = \begin{cases} j \text{ om } a \text{ är jämnt,} \\ u \text{ om } a \text{ är udda.} \end{cases}$$

Funktionen g *kommer att vara surjektiv men inte injektiv eftersom* $1 \neq 3$ *men* $f(1) = f(3)(= u)$.

Exempel 3.17. *Låt* $X = \{a, b, c\}$ *och låt* $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*. Bestäm antalet injektiva funktioner från* X *till* Y.

Lösningsförslag: Om vi ska skapa en injektiv funktion f från X till Y så har vi fem val för $f(a)$. När vi bestämt $f(a)$ så har vi sedan fyra val för $f(b)$ (det får ju inte gälla att $f(a) = f(b)$ eftersom vi kräver att funktionen ska vara injektiv). Slutligen har vi tre val för $f(c)$. Det följer enligt multiplikationsprincipen att antalet injektiva funktioner från X till Y är lika med $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. ★

3.2.3 Sammansättningen av två funktioner

Låt $f : Y \to C$ och $g : X \to Y$ vara två funktioner. Lägg märke till att funktionen g:s målmängd är densamma som funktionen f:s definitionsmängd.

Om vi tar ett element $x \in X$ och applicerar funktionen g så får vi ett element i Y, det vill säga $g(x) = y \in Y$. Och om vi applicerar funktionen f på y så får vi ett element i C, det vill säga $f(y) = c \in C$. Funktionen h från X till C definierad genom att första applicera g och sedan f är den *sammansatta funktionen* av f och g och det gäller att

$$h(x) = f(g(x)).$$

Funktionen h:s defintionsmängd blir X och dess målmängd blir C.

Exempel 3.18. *Låt oss sammansätta funktionen* $g : \mathbb{Z} \to \{j, u\}$,

$$g(a) = \begin{cases} j \text{ om } a \text{ är jämnt,} \\ u \text{ om } a \text{ är udda.} \end{cases}$$

med funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$*. Kalla den sammansatta funktionen för* h*. Det gäller alltså att*

$$h : \mathbb{Z} \to \{j, u\} \text{ och att } h(a) = g(f(a)).$$

Då är

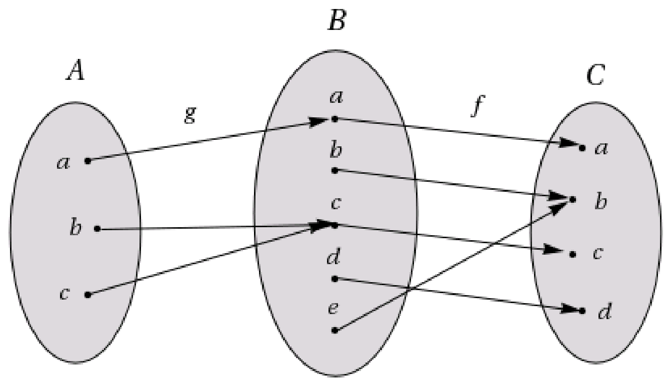
$$h(1) = g(f(1)) = g(2) = j, \quad h(2) = g(f(2)) = g(4) = j \quad \text{och} \quad h(3) = g(f(3)) = g(6) = j.$$

Det verkar alltså som att h *avbildar alla värden på* j*. Det stämmer, och det beror på att*

$$h(a) = g(f(a)) = g(2a) = j,$$

oberoende av värdet på a*. Eftersom det inte finns något tal* $a \in \mathbb{Z}$ *så att* $h(a) =$*u, så är funktionen inte surjektiv. Funktionen är inte heller injektiv eftersom den avbildar skilda element på samma element.*

Ofta hjälper det att tänka i bilder, se Figur 4.



Figur 4: Funktionen f är en funktion från B till C och funktionen g är en funktion från A till B. Den sammansatta funktionen definierad av $h(x) = f(g(x))$ blir då en funktion från A till C och $h(a) = a$, $h(b) = c$ och $h(c) = c$.

Exempel 3.19. *Låt* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *och* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *vara sådana att* $p(a) = \sqrt{a}$ *och* $q(a) = a$*. Låt* r *vara den sammansatta funktionen av* q *och* p*, det vill säga* $r(a) = q(p(a))$*.*

1. *Bestäm r:s definitionsmängd och målmängd.*
2. *Bestäm r:s värdemängd.*
3. *Är r injektiv? Är r surjektiv?*

Lösningsförslag:

1. Eftersom r är en sammansättning av q och p har den samma definitionsmängd som p och samma målmängd som q. Definitionsmängden är alltså $\mathbb{N}$ och målmängden är $\mathbb{C}$.
2. Värdemängden är $\{r(a) \,|\, a \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{a} \,|\, a \in \mathbb{N}\}$, det vill säga roten ur alla naturliga tal.
3. Funktionen r är injektiv eftersom skilda tal går på skilda tal. Det kan motiveras matematiskt som följer. Antag att $r(a) = r(b)$. Om vi kan visa att detta medför att $a = b$ så är funktionen injektiv. Men $r(a) = r(b)$ är detsamma som att $\sqrt{a} = \sqrt{(b)}$, vilket medför $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{(b)})^2$, det vill säga att $a = b$. Alltså är funktionen injektiv.

   Men funktionen är inte surjektiv. Till exempel finns det inget tal som träffar -1, som ju är ett element i målmängden.

★

Exempel 3.20. *Låt* $f(x) = x^2 + 1$ *vara en funktion från* $\mathbb{R}$ *till* $\mathbb{R}$ *och låt* $g(x) = x + 1$ *vara en funktion från* $\mathbb{R}$ *till* $\mathbb{R}$*. Vi har* $f(g(x)) = f(x+1) = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$ *och* $g(f(x)) = g(x^2+1) = x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2$*. Observera att* $f(g(x)) \neq g(f(x))$*, något som i princip alltid gäller vid sammansättning.*

3.2.4 Inverterbara funktioner

Låt f vara en surjektiv funktion från en mängd X till en mängd Y. Eftersom f är surjektiv innebär det att det till varje element b i Y finns minst ett element a i X så att $f(a) = b$. Om vi dessutom kräver att f är injektiv så betyder det att det till varje element b i Y finns *exakt* ett element a i X så att $f(a) = b$.

Om f är injektiv och surjektiv så kan vi därför skapa en ny funktion g från Y till X genom $g(b) = a$, där a är det unika element så att $f(a) = b$. Denna funktion kallas *inversen* till f och betecknas vanligen f^{-1}. Vi säger att funktionen f är *inverterbar*.

Exempel 3.21. *Låt f vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$ definierad genom $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2, f(d) = 4$. Då är f injektiv och surjektiv och f^{-1} är funktionen från $\{1, 2, 3, 4\}$ till $\{a, b, c, d\}$ som uppfyller $f^{-1}(1) = a, f^{-1}(2) = c, f^{-1}(3) = b, f^{-1}(4) = d$.*

Exempel 3.22. *Låt f vara en funktion från heltalen till de jämna heltalen definierad genom $f(a) = 2a$. Då är f injektiv och surjektiv och alltså inverterbar. Inversen, som är en funktion från de jämna heltalen till heltalen, ges av $f^{-1}(a) = a/2$ (observera att a är ett jämnt tal, och alltså delbart med två).*

Sammansättningen av en inverterbar funktion från A till B med sin invers blir en funktion från A till A sådan att $f(a) = a$ för alla $a \in A$. En sådan funktion kallas *identitetsfunktionen* på mängden A.

Exempel 3.23. *Låt f vara funktionen i Exempel 3.21. Vi verifierar att sammansättningen blir identitetsfunktionen på $\{a, b, c, d\}$ genom*

$$f(f^{-1}(1)) = f(a) = 1, f(f^{-1}(2)) = f(c) = 2, f(f^{-1}(3)) = f(b) = 3 \text{ och } f(f^{-1}(4)) = f(d) = 4.$$

Att skapa en inverterbar funktion från en injektiv funktion

Låt f vara en injektiv funktion från X till Y med värdemängd C. Vi kan då skapa en ny funktion g från X till C så att $g(x) = f(x)$. Funktionen g blir nu både injektiv och surjektiv och alltså är f inverterbar med invers funktion g^{-1} från C till X. Den här typen av konstruktioner är väldigt vanliga i matematiken och vi kommer att stöta på den igen i avsnittet om reella funktioner där vi tittar på inversen till exponentialfunktioner.

Exempel 3.24. *Låt f vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definierad genom $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2$ och $f(d) = 4$. Då är f en injektiv funktion med värdemängd $\{1, 2, 3, 4\}$, men ej en surjektiv funktion. Om vi istället låter g vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$ så att $g(x) = f(x)$ så blir g både en injektiv och en surjektiv funktion, vilket betyder att den är inverterbar.*

Jämför även skillnaden mellan Exempel 3.12 och Exempel 3.13.

Övningar

1. Låt f vara en funktion från $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b, c\}$ definierad genom $f(1) = a$, $f(2) = a$ och $f(3) = b$. Ange $f:s$ värdemängd och avgör om f är injektiv.

2. Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $f(a) = -a$. Är f surjektiv? Är f injektiv?

3. Låt $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $g(a) = f(f(a))^2$, där $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definieras av $f(a) = -a$. Bestäm $g(a)$ utan att svara i termer av f. Är g surjektiv? Är g injektiv?

3.3 Grafritning och reella funktioner

I det här omfattande avsnittet kommer vi att betrakta funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Sådana funktioner kallas *reella* funktioner.

3.3.1 Reella punktmängder, det reella talplanet och grafer

Mängden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ består av alla par av punkter (a, b), där a och b ligger i $\mathbb{R}$. Om (a, b) är en punkt så kallas det reella talet a för *x-koordinaten* till punkten (a, b) och det reella talet b för *y-koordinaten* till punkten (a, b).

Det reella talplanet är den geometriska motsvarigheten till mängden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ och ”spänns” upp av två *koordinataxlar*, *x-axeln* och *y-axeln*. Varje punkt i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kan markeras i det reella talplanet precis som vi är vana vid. Istället för det reella talplanet säger man ibland *xy-planet*.

Definition 5. *En reell punktmängd i planet är en delmängd av det reella talplanet.*

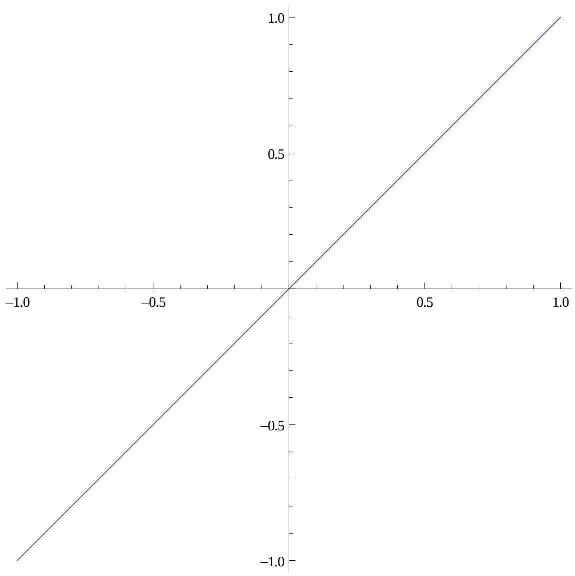
Grafen till en reell punktmängd i planet är utmarkeringen av alla punkter i mängden (vanligtvis oändligt många) i det reella talplanet.

Till varje reell funktion $f(x)$ kan vi bilda en punktmängd som består av alla par (x, y), där $y = f(x)$. Det är naturligt att tänka på denna punktmängd som alla par (x, y) som uppfyller ekvationen $y = f(x)$.

Funktionsgrafen till en funktion blir då grafen till denna punktmängd. Vanligtvis skriver man ”grafen till $f(x)$” istället för ”funktionsgrafen till $f(x)$”. Om $f(x)$ är ett förstagradspolynom så kan man understryka det genom att skriva ”grafen till *linjen* $y = f(x)$”. När $f(x)$ är ett andragradspolynom så kan man göra det tydligt genom att skriva ”grafen till *parabeln* $y = f(x)$”. Man skriver ibland även ”grafen till *kurvan* $y = f(x)$”, vilket egentligen inte förutsätter någonting alls om $f(x)$.

Man kan också betrakta mer komplicerade samband mellan x- och y-variabeln. Grafen till $y^2 = -x^2 + 1$ är till exempel en cirkel.

Exempel 3.25. *När $f(x)$ är ett förstagradspolynom, $f(x) = ax + b$, så bildar grafen till $y = f(x)$ en rät linje. I Figur 5 illustreras grafen till funktionen $f(x) = x$, som alltså är grafen till punktmängden $\{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.*



Figur 5: Grafen till $f(x) = x$.

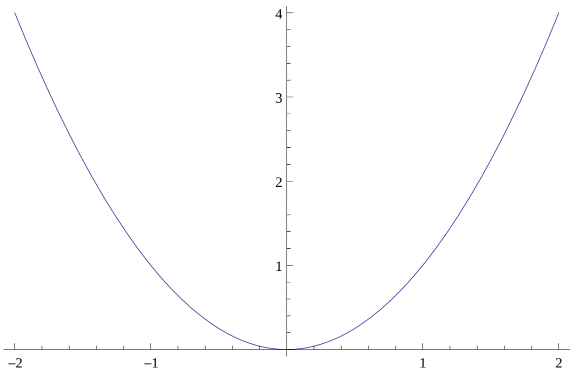
Skissen i Figur 5 sker då x går från -1 och 1, vilket vi också kan uttrycka som att vi skissar $f(x) = x$ i *intervallet* $[-1, 1]$. Vi kan vända på hakparenteserna också. När $a \leq b$ så gäller det att

$$]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\},$$

vilket innebär att $]a, b[$ är intervallet mellan a och b med ändpunkterna borttagna.

Funktionen $f(x) = x$ är injektiv eftersom $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$. Givetvis är funktionen $f(x) = x$ även surjektiv — värdemängden till f är hela $\mathbb{R}$.

Exempel 3.26. *För funktionen $f(x) = x^2$ blir punktmängden lika med $\{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$. Grafen till $f(x)$ skissas i Figur 6.*



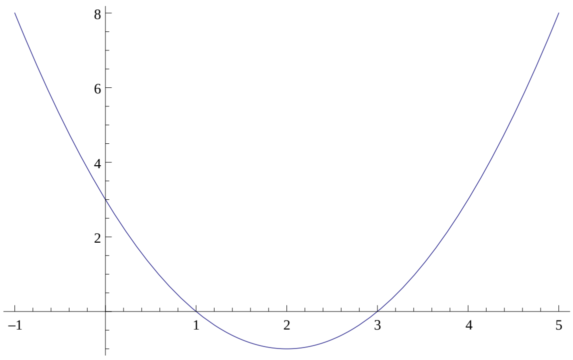
Figur 6: Grafen till funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[-2, 2]$

Denna funktion är inte injektiv eftersom $f(-1) = f(1) = 1$. Funktionen är inte heller surjektiv — det finns inget reellt tal vars kvadrat är negativ och alltså är $V_f = \{x \geq 0\}$.

Man kan direkt se från en funktionsgraf om funktionen är injektiv — i så fall ska varje vågrät linje skära grafen på *högst* ett ställe. Och om varje vågrät linje skär grafen på *minst* ett ställe är den surjektiv.

3.3.2 Skärningen av två kurvor

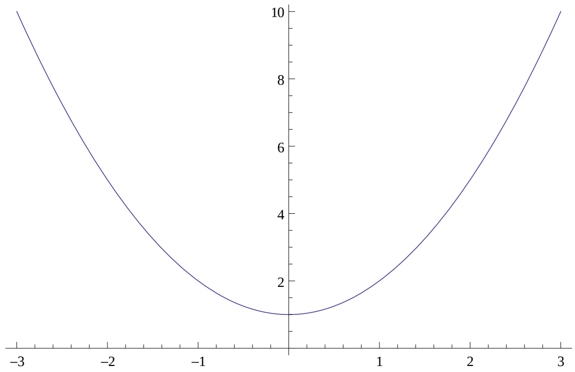
Geometriskt svarar lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$ mot de x-koordinater där grafen till funktionen $f(x)$ skär x-axeln.



Figur 7: Grafen till $y = x^2 - 4x + 3$ på intervallet $[-1, 5]$. Ekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ har 1 och 3 som rötter, vilket sammanfaller med de x-koordinater där grafen skär x-axeln.

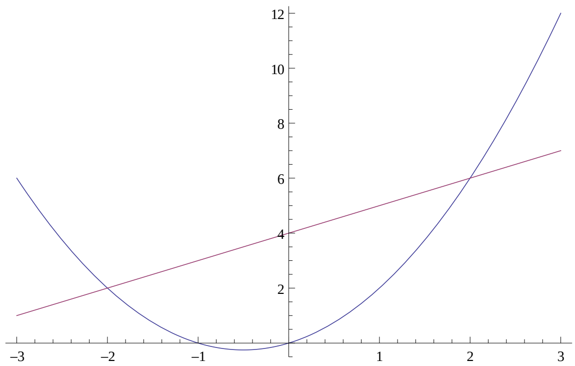
För att bestämma skärningspunkter mellan olika funktionsgrafer underlättar det ofta att översätta det geometriska problemet till ett algebraiskt problem. Genom att sätta grafernas funktioner lika får vi en ekvation som gör att vi kan bestämma x-koordinaterna för skärningspunkterna. Med insättning av x-koordinaterna (i någon av ekvationerna) kan vi även bestämma motsvarande y-koordinat.

Exempel 3.27. *Bestäm de punkter i det reella talplanet där grafen till $f(x) = x^2 + x$ skär grafen till $h(x) = x + 4$.*



Figur 8: Grafen till $x^2 + 1$ på intervallet $[-3, 3]$. Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ saknar reella lösningar och grafen till $x^2 + 1$ skär därför inte x-axeln.

Lösningsförslag: Algebraiskt svarar frågan mot lösningar till ekvationen $f(x) = h(x)$, det vill säga lösningar till ekvationen $x^2 + x = x + 4$. Lösningarna till den ekvationen är $x \pm 2$. Vi har $f(2) = 6$ och $f(-2) = 2$, så skärningspunkterna är därför $(2, 6)$ och $(-2, 2)$, se även Figur 9. ★



Figur 9: Graferna till $x^2 + x$ och $x + 4$ skär varandra i punkterna $(2, 6)$ och $(-2, 2)$.

Observera att det även kan hända att en linje och en parabel saknar skärningspunkter. Linjen $y = x - 1$ kommer aldrig att skära parabeln $y = x^2 + x$ eftersom ekvationen $x^2 + x = x - 1$, som kan förenklas till $x^2 = -1$, saknar reella lösningar.

Kuriosa 7. *Algebraisk geometri är ett stort forskningsområde inom matematik och handlar i grunden om lösningar till ekvationssystem. Att kunna gå mellan algebraiska till geometriska framställningar av samma objekt är centralt i denna disciplin.*

3.3.3 Grafen till den inversa funktionen

Låt oss betrakta punktmängden $\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Grafen till funktionen $f(x) = 1$ sammanfaller med bilden av den punktmängden.

Det är dock inte alltid som en punktmängd faktiskt svarar mot grafen till en funktion. Låt oss till exempel istället betrakta punktmängden $\{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Om det skulle finnas en funktion $f(x)$ vars graf sammanfaller med bilden av punktmängden så skulle $f(1)$ anta alla reella värden och det är ju inte tillåtet. En funktion kan bara anta ett värde i varje punkt.

Låt oss anta att den reella funktionen f är inverterar med invers f^{-1}. Hur ser grafen till f^{-1} ut? Vi börjar med att betrakta punktmängden som hör till f. Den består som bekant av alla punkter på formen $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Låt nu (x, y) vara en sådan punkt, där alltså $y = f(x)$. Eftersom f^{-1} är inversen till f gäller det att $f^{-1}(y) = x$. Det betyder att punken (y, x) ingår i punktmängden som hör till f^{-1}. Resonemanget medför att punktmängden som hör till f^{-1} är alla punkter på formen $\{(f(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Den geometriska tolkningen är att grafen till den inversa funktionen är *spegelbilden* till grafen till funktionen längs den räta linjen $y = x$.

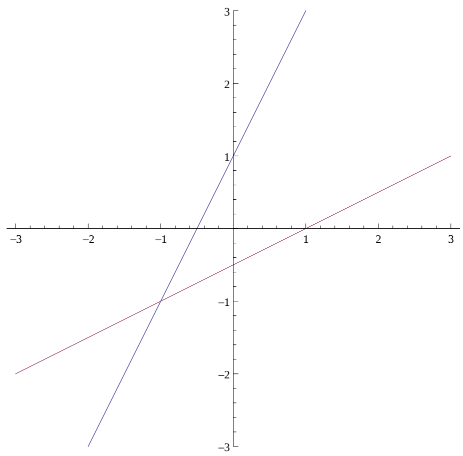
Förstagradspolynom är i allmänhet inverterbara. Exemplet nedan visar hur man i detta fall kan bestämma den inversa funktionen med hjälp av substitution.

Exempel 3.28. *Bestäm den inversa funktionen till* $f(x) = 2x + 1$.

Lösningsförslag: Punktmängden som hör till grafen till $f(x)$ kan skrivas på formen $\{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ och grafen till den inversa funktionen blir då $\{(2x + 1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Genom substitutionen $z = 2x + 1$ får vi $x = (z - 1)/2 = z/2 - 1/2$. Punktmängden $\{(2x + 1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ är alltså lika med punktmängden $\{(z, z/2 - 1/2) \mid z \in \mathbb{R}\}$ och funktionen $g(x) = x/2 - 1/2$ blir den inversa funktionen till $2x + 1$. Graferna är skissade i Figur 10. Vi kan kontrollera att $g(x)$ är en invers funktion till $f(x)$ genom att kontrollera att sammansättningen av f och g blir identitetsfunktionen, vilket följer från uträkningen

$$f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(x/2 - 1/2) + 1 = x.$$

★



Figur 10: Grafen till funktionen $f(x) = 2x + 1$ och dess invers $f^{-1}(x) = x/2 - 1/2$. Notera att de två graferna är varandras spegelbilder längs linjen $y = x$.

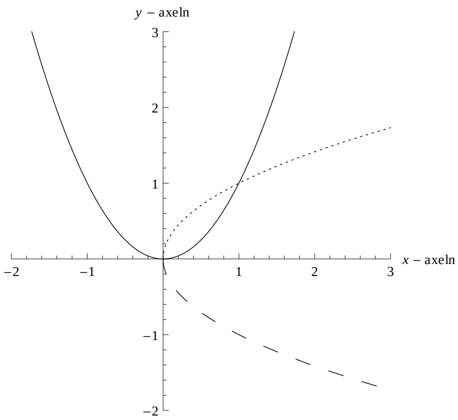
Däremot saknar funktionen $f(x) = x^2$ invers eftersom den funktionen inte är injektiv. I Figur 11 visas delar av punktmängderna $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ och $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Om vi krymper definitionsmängden och målmängden från hela $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}_{\geq 0}$ så blir $f(x) = x^2$ injektiv och surjektiv. Inversen ges nämligen av $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, eftersom det ju gäller att $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$ om $x \geq 0$.

Istället för att krympa definitionsmängden för $f(x) = x^2$ så kan vi säga att f är inverterbar på *intervallet* $[0, \infty[$.

3.3.4 Cirkelns ekvation

Om (x, y) är en punkt på en cirkeln med radie r så gäller det att avståndet från punkten (x, y) till origo är lika med r. Det följer därför från Pythagoras sats att $x^2 + y^2 = r^2$, vilket är cirkelns ekvation när den har sitt centrum i punkten $(0, 0)$.

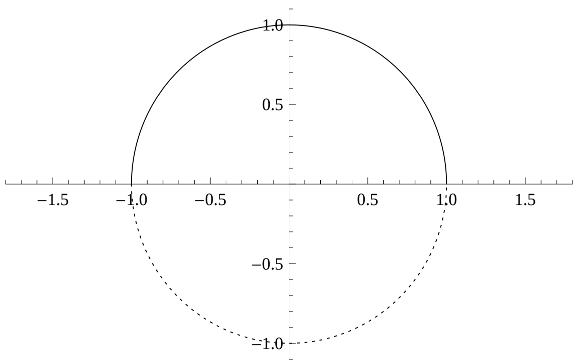


Figur 11: Den heldragna kurvan visar en del av punktmängden $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, det vill säga grafen till funktionen $f(x) = x^2$. Den streckade kurvan visar en del av punktmängden $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Den streckade kurvan är inte grafen till någon funktion. Däremot är den del som har mindre streck grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och den del som har långa streck är grafen till funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$. Observera återigen symmetrin längs linjen $y = x$.

Det innebär att punktmängden som bildar cirkeln är alla punkter (x, y) som uppfyller att $x^2 + y^2 = r^2$, det vill säga $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$. Men det finns ingen funktion $f(x)$ så att $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ är lika med den punktmängden.

Anledningen till det är att både $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$ och $(r/\sqrt{2}, -r/\sqrt{2})$ ligger på cirkeln, ty båda dessa punkter uppfyller cirkelns ekvation. Vi skulle alltså behöva kräva av vår funktion att $f(r/\sqrt{2})$ antog både värdet $r/\sqrt{2}$ och $-r/\sqrt{2}$, vilket inte är tillåtet.

Däremot är det möjligt att beskriva punktmängden som en union av två punktmängder som vi kan beskriva med funktioner, nämligen $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ och $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, där f_1 och f_2 är definierade i intervallet $[-r, r]$. Figur 12 visar grafen till funktionerna $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.



Figur 12: Cirkel med radie 1. Den heldragna linjen är grafen till funktionen $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och den streckade linjen är grafen till funktionen $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Det är även möjligt att ge cirkelns ekvation även när centrum ligger i en annan punkt än origo. Låt oss anta att centrum ligger i punkten (a, b). Om (x, y) är en punkt på cirkeln så gäller det att avståndet från punkten (x, y) till punkten (a, b) är lika med r. Enligt Pythagoras sats gäller det alltså att

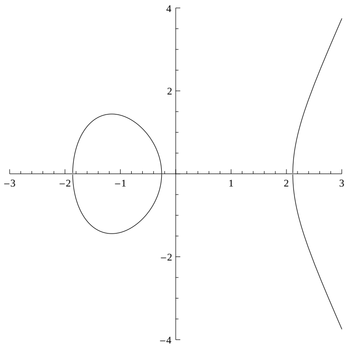
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

vilket är cirkelns allmänna ekvation.

Exempel 3.29. *Bestäm ekvationen för en cirkel som har sin medelpunkt i* $(1,1)$ *och radie* $\sqrt{2}$

Lösningsförslag: För att en punkt (x,y) ska ligga på cirkeln så måste det gälla att $(x-1)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$, vilket ger oss ekvationen $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$. ★

Kuriosa 8. *Om man modifierar cirkelns ekvation kan man få andra geometriska objekt. Låt oss betrakta mängden av alla reella tal* (x,y) *så att* $y^2 = x^3 - 4x - 1$*. Denna punktmängd bildar en så kallad elliptisk kurva, som är intressant bland annat för sin tillämpning inom kryptografi. Som Figur 13 visar så är punktmängden väsentligt skild från cirkelns punktmängd.*



Figur 13: Grafen till kurvan $y^2 = x^3 - 4x - 1$ på intervallet $[-3,3]$.

3.3.5 Några reella funktioner och dess grafer

Vi ska nu gå igenom några vanliga reella funktioner. Vi väntar med att gå igenom de trigonometriska funktionerna till avsnitt 3.5.

Räta linjer Den räta linjens ekvation är $y = f(x)$, där $f(x)$ är ett linjärt polynom. Ofta använder man bokstäverna k och m och skriver den räta linjens ekvation som

$$y = kx + m.$$

Geometriskt anger talet k *lutningen* på den räta linjen, det vill säga kvoten av skillnaden i y-led med skillnaden i x-led för två godtyckliga distinkta punkter på linjen. Talet m anger den y-koordinat där linjen skär y-axeln.

En rät linje $y = kx+m$ bestäms entydigt av två distinkta punkter i planet som följande exempel visar.

Exempel 3.30. *Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna* $(1,2)$ *och* $(-1,1)$.

Lösningsförslag: Den räta linjen är på formen $y = kx+m$. Att den första punkten ligger på linjen ger oss ekvationen $2 = k \cdot 1 + m$. Den andra punkten ger oss $1 = k \cdot (-1) + m$. Detta ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} k + m = 2 \\ -k + m = 1. \end{cases}$$

Den första ekvationen skrivs om som $k = 2 - m$ och insättning i den andra ekvationen ger oss $1 = -(2-m) + m$, det vill säga $3 = 2m$ eller $m = 3/2$. Vi får $k = 2 - 3/2 = 1/2$. Den räta linjen ges alltså av ekvationen $y = x/2 + 3/2$. ★

Lutningen på linjen och en punkt på den räcker också för att bestämma ekvationen.

Exempel 3.31. *Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten* $(1, 1)$ *och har lutningen* -2.

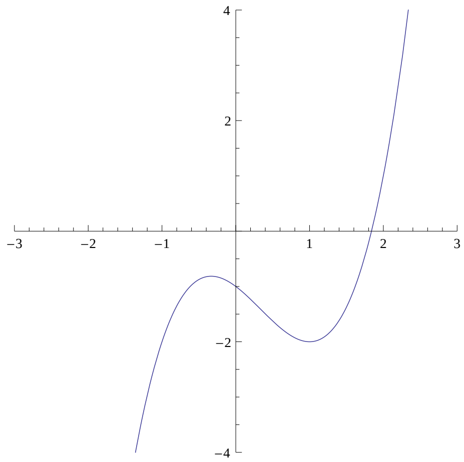
Lösningsförslag: Den räta linjen är på formen $y = kx + m$. Att den första punkten ligger på linjen ger oss ekvationen $1 = k \cdot 1 + m$. Att lutningen är -2 ger oss $k = -2$. Vi kan alltså lösa ut m som blir lika med tre. Ekvationen är alltså $y = -2x + 3$. ★

Det finns ett intressant specialfall i den räta linjens ekvation, nämligen när $k = 0$, det vill säga då $f(x) = m$ för alla x. I detta fall är grafen till $y = f(x)$ att vara parallell med x-axeln och värdemängden till f kommer att bestå av ett enda element; $V_f = \{m\}$. Funktionen $f(x) = m$ är sålunda varken injektiv eller surjektiv. För andra k-värden än 0 är dock $f(x) = kx + m$ alltid både injektiv och surjektiv.

Polynomfunktioner av högre grad Vi har redan sett att vi kan betrakta polynom som funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Definitionsmängden för ett godtyckligt polynom kan väljas till hela $\mathbb{R}$ och i allmänhet saknar polynomfunktionerna invers.

När funktionen f har udda grad så är värdemängden hela $\mathbb{R}$, det vill säga att f är surjektiv, men när f har jämn grad är värdemängden bara en delmängd till $\mathbb{R}$. Låt oss förklara detta med två exempel.

Betrakta först polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, vars graf delvis är uppritad i Figur 14. När

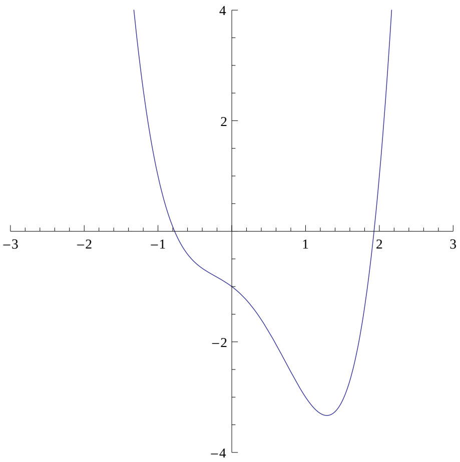


Figur 14: Grafen till funktionen $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

x växer kommer x^3-termens bidrag till polynomet att vara dominerande. Redan i $x = 10$ blir x^3-termen $10^3 = 1000$, att jämföra med -111 för ”svansen” $-x^2 - x - 1$. Och avståndet mellan x^3-termen och dess svans växer när x ökar. Även när x blir ett tillräckligt stort negativt tal, kommer x^3-termen att dominera. För $x = -10$ är x^3-termens bidrag -1000 och svansens bidrag endast -91.

Polynomet $p(x)$ uppför sig med andra ord ungefär som x^3 när x är ett väldigt stort positivt tal eller ett väldigt stort negativt tal. Det följer att $p(x)$ är negativt när x är ett tillräckligt stort negativt tal och positivt när x är ett tillräckligt stort positivt tal. Det innebär att $p(x)$ kommer att kunna anta godtyckligt stora värden och godtycklig stora negativa värden. Värdemängden V_p kommer därför att vara hela $\mathbb{R}$.

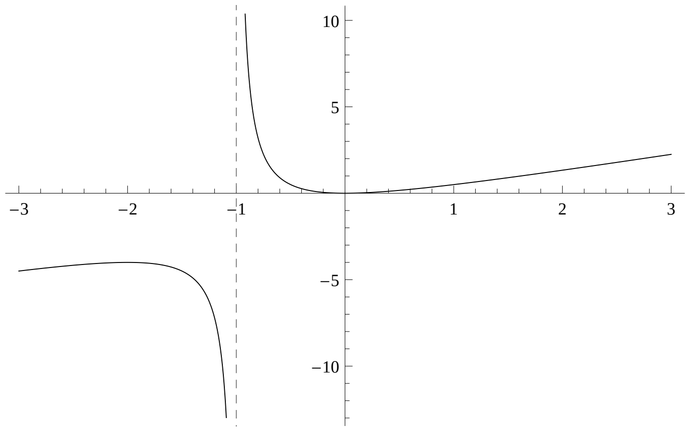
På motsvarande sätt kan vi se att det är x^4-termen som tydligt dominerar i polynomet $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$, uppritat i Figur 15 redan när $x = -10$ eller när $x = 10$. Det innebär att $g(x)$



Figur 15: Grafen till funktionen $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$.

är positivt när x är ett tillräckligt stort negativt eller positivt tal. En följd av detta är att stora negativa tal kommer att saknas i värdemängden till g och att g inte är surjektiv.

Rationella funktioner. En rationell funktion är en kvot mellan två polynom. Definitionsmängden till en rationell funktion är hela $\mathbb{R}$ förutom de punkter där nämnaren är lika med noll. För den rationella funktionen $\frac{x^2}{x+1}$ är definitionsmängden $\{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Nära de punkter där nämnaren är lika med noll uppstår så kallade *lodräta asymptoter*, se Figur 16.



Figur 16: Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Nära punkten -1, där $f(x)$ inte är definierad, har funktionen en lodrät asymptot.

En rationell funktion är inte riktigt samma sak som ett rationellt uttryck. Båda är kvoter av polynom, men för rationella uttryck tillåter man förenklingar.

Det rationella uttrycket

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

kan skrivas om som

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

och därefter förkortas till $x+1$, medan vi inte kan göra samma sak om vi betraktar

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

som en funktion. I så fall skulle vi ju ändra definitionsmängden för funktionen. Med $x-1$ i nämnaren kan inte 1 ingå i definitionsmängden, men för $x+1$ kan alla reella tal utgöra definitionsmängd.

När vi ska lösa ekvationer av typen $f(x)=0$ där $f(x)$ är en rationell funktion gör man först en omskrivning så att man får en polynomekvation. Man måste sedan kontrollera att lösningarna inte gör någon av de ingående nämnarna till noll.

Exempel 3.32. *Lös ekvationen*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+1=0.$$

Vi börjar med att göra liknämnigt och får vänsterledet till

$$\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x(x+1)}{x(x+1)}.$$

Vi multiplicerar sedan med $x(x+1)$ i båda led och får ekvationen

$$x+1+x+x(x+1)=0,$$

vilken vi kan skriva om som

$$x^2+3x+1=0$$

med lösningarna $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, som inte gör någon av nämnarna till noll. Alltså är $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ lösningar till vår ekvation.

Exponentialfunktioner. En exponentialfunktion är en funktion på formen $f(x)=a^x$, där a är ett positivt reellt tal. De vanligaste exponentialfunktionerna är $2^x, 10^x$ och e^x, där e är ett reellt tal som har egenskapen att e^x är sin egen derivata (se nästa kapitel). Talet e är ungefär lika med 2.718.

Kuriosa 9. *Talet e är faktiskt lika med den oändliga summan*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots$$

Symbolen ∞ är en matematisk beteckning av oändligheten *och notationen $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}$ innebär alltså att vi ska lägga ihop alla termer på formen $1/j!$, där j är ett naturligt tal. Att summan verkligen blir ändlig bevisas normalt under den inledande analyskursen på högskolan.*

Definitionsmängderna för de tre exponentialfunktionerna är hela $\mathbb{R}$ och värdemängden är de positiva reella talen, R_+.

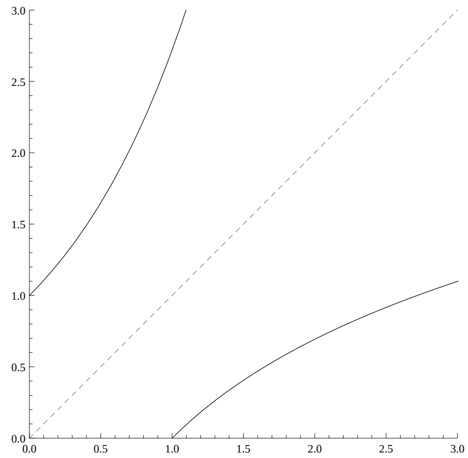
Logaritmfunktioner. Exponentialfunktionerna är injektiva. Om vi betraktar dem som funktioner från $\mathbb{R}$ till deras värdemängd $\mathbb{R}_+$ så blir de dessutom surjektiva och därmed inverterbara enligt vad vi resonerade oss fram till i avsnitt 3.2.4.

Inversen till en exponentialfunktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}_+$ kallas *logaritmfunktion*. Definitionsmängden till en logaritmfunktion är alltså $\mathbb{R}_+$ och målmängden är hela $\mathbb{R}$. Det innebär att en logaritmfunktion aldrig är definierad för negativa tal.

Mer precist är 2-logaritmen, betecknad $\log_2(x)$, inversen till 2^x, 10-logaritmen, betecknad $\lg(x)$ eller $\log_{10}(x)$, är inversen till 10^x och den *naturliga logaritmen*, betecknad $\ln x$, är inversen till e^x.

Det gäller alltså att $e^{\ln x}=x$ när $x\in\mathbb{R}_+$ och $\ln e^x=x$ när $x\in\mathbb{R}$. I Figur 17 visas grafen till e^x och $\ln x$ i intervallet $[1,3]$.

Kanske har du stött på de så kallade *logaritmlagarna* som beskriver hur man räknar med logaritmer. Dessa är



Figur 17: Den övre kurvan är grafen till funktionen e^x och den undre kurvan är grafen till funktionen $\ln x$ på intervallet $[1, 3]$. Den sträckade linjen är grafen till $f(x) = x$. Lägg som vanligt märke till att de två första graferna är varandras spegelbilder i den linjen.

$$\boxed{\begin{array}{c} \log(ab) = \log a + \log b \\ \log a^b = b \log a \end{array}}$$

Lagarna gäller oavsett vilken logaritmbas man använder. Låt oss bevisa den första logaritmlagen när logaritmen är naturlig. Låt a och b vara två positiva reella tal. Då finns det c och d så att $e^c = a$ och $e^d = b$, nämligen $c = \ln a$ och $d = \ln b$. Vi har alltså att $a \cdot b = e^c \cdot e^d = e^{c+d}$, så $\ln(ab) = \ln(e^{c+d}) = c + d = \ln a + \ln b$.

Eftersom

$$\log(a/b) = \log(a \cdot b^{-1}) = \log(a) + \log(b^{-1}) = \log(a) + (-1) \cdot \log(b) = \log a - \log b$$

så gäller dessutom sambandet

$$\boxed{\log(a/b) = \log a - \log b.}$$

Exempel 3.33.

$$\log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

I allmänhet går det inte att skriva uttryck innehållandes logaritmer som rationella tal. Men i exemplet nedan, som är klassiskt, är det möjligt!

Exempel 3.34. *Skriv* $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$ *som ett heltal.*

Lösningsförslag:

Genom att använda den första logaritmlagen baklänges får vi $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1$.

★

Exempel 3.35. *Lös ekvationen* $e^x = 2$.

Lösningsförslag: Logaritmering av båda sidor ger oss $\ln e^x = \ln 2$. Eftersom $\ln e^x = x$ så blir $x = \ln 2$ lösningen till ekvationen.

★

Exempel 3.36. *Lös ekvationen* $\ln x = 5$.

Lösningsförslag: Vi exponentierar båda led och får $e^{\ln x} = e^5$. Eftersom $e^{\ln x} = x$ så är $x = e^5$.

★

Exempel 3.37. *Lös ekvationen* $2\ln(x-4) = \ln x + \ln 2$.

Lösningsförslag: Vi skriver om ekvationen som $\ln(x-4)^2 = \ln 2x$ genom att använda logaritmlagarna. Vi exponentierar därefter båda led och får ekvationen $(x-4)^2 = 2x$ som har rötterna $x = 2$ och $x = 8$. Roten $x = 2$ är dock en falsk rot eftersom $\ln(2-4) = \ln(-2)$ är odefinierat. (Logaritmfunktionernas definitionsmängd är $\mathbb{R}_+$.) ★

Exempel 3.38. *Förenkla* $e^{\ln 5} - 3\ln 3 + \ln(e^5 \cdot 3) + \ln 9$.

Lösningsförslag: Vi har $e^{\ln 5} = 5$ eftersom den naturliga logaritmen är invers funktion till e^x. Vidare är $\ln(e^5 \cdot 3) = \ln e^5 + \ln 3 = 5\ln e + \ln 3 = 5 + \ln 3$. Detta ger

$$\begin{gathered} e^{\ln 5} - 3\ln 3 + \ln(e^5 \cdot 3) + \ln 9 \\ = 5 - 3\ln 3 + 5 + \ln 3 + \ln 9 = 10 - 2\ln 3 + \ln 9 = 10 - \ln 3^2 + \ln 9 = 10. \end{gathered}$$

★

Ett vanligt misstag vid logaritmräkning är att skriva om $\log(x+y)$ som $\log(x) + \log(y)$. Om vi låter $x = y = 4$ så får vi $\log_2(x+y) = \log_2(4+4) = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$, medan $\log_2(x) + \log_2(y) = \log_2(4) + \log_2(4) = \log_2(2^2) + \log_2(2^2) = 2 + 2 = 4$. Det gäller alltså att $\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$ i allmänhet.

Övningar

1. Vilka av följande mängder av punkter (x, y) utgör grafen till en funktion $y = f(x)$? Varför?
   (a) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$.
   (b) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x^2 + y^2 = 1$.
   (c) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x - y^2 = 0$.
2. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = x^2$. Rita kurvorna
   (a) $y = f(x)$.
   (b) $y = f(x-1)$.
   (c) $y = f(x) + 1$.
   (d) $y = f(-x)$.
3. Rita grafen till funktionen
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{då } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{då } x > 1 \end{cases}.$$

4. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = 2x$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.

5. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = 3x + 5$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.

6. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkten $(3, 7)$ och har lutningskoefficient $1/2$.

7. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkterna $(-3, 5)$ och $(\frac{3}{2}, 10)$.

8. Lös ekvationerna
   (a) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$
   (b) $\ln(1/x^2) + \ln x^3 = 0$

9. Förenkla $10^{\lg 5} + \lg(6 \cdot 5) - \lg(3^3) + \lg 9$.

10. (svår) För ett radioaktivt sönderfall gäller formeln
$$m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$$
där $m(t)$ är ämnets massa vid tiden t och λ är sönderfallskonstanten. Med halveringstiden T menas den tid det tar för ämnet att reducera sin massa till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T.

11. Lös ekvationerna
   (a) $3^{x^2} 3^{2x} = \frac{1}{3}$
   (b) $4^{t+2} - 48 = 16$
   (c) $(e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = 1$

12. Lös ekvationerna
   (a) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{5x^3-5}{x^3-1}$
   (b) $\frac{x-3}{x+4} = \frac{x+4}{x-3}$
   (c) $\frac{5(x-3)}{2x+8} = \frac{10}{2x^2-32}$

13. Ge en uppskattning av e genom att summera de fem första termerna i den oändliga summan som definierar e.

14. Hitta med papper och penna åtminstone tre punkter på den elliptiska kurvan i Figur 13. Tips: Ansätt x-koordinaten och försök lösa den uppkomna ekvationen. Upprepa.

3.4 Olikheter och absolutbelopp

I det här avsnittet studerar vi olikheter och absolutbelopp över de reella talen.

3.4.1 Olikheter

Olikheter påminner mycket om likheter men det finns vissa fällor man får se upp med. Vi börjar med ett par lagar som gäller för räkning med olikheter:

$$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow a + c > b + c \\ a > b &\Leftrightarrow r \cdot a > r \cdot b \text{ om } r > 0 \\ a > b &\Leftrightarrow r \cdot a < r \cdot b \text{ om } r < 0 \end{aligned}$$

När vi arbetar med olikheter så är det oftast inte ett unikt tal x som blir lösningen utan ett helt intervall, $a < x < b$. Dessa intervall kan beskrivas på flera sätt:

Lösning	Intervall
$0 \leq x \leq 1$	$[0,1]$
$0 < x \leq 1$	$]0,1]$
$0 \leq x < 1$	$[0,1[$
$0 < x < 1$	$]0,1[$
$0 < x$	$]0,\infty[$
$x < 0$	$]-\infty,0[$

Observera alltså att det är skillnad på lösningsmängden till $x > 0$ och $x \geq 0$. I den första mängden så är bara de positiva talen lösningar, men i den andra mängden så är även $x = 0$ en giltig lösning. Vi kommer också stöta på lösningsmängder som består av flera intervall. Låt säga $35 < t < 45$ är det tidsintervall där kladdkakan är färdig, där $t = 0$ är när vi stoppade in den i ugnen. Då kommer $t \leq 35$ och $t \geq 45$ vara de intervall där kladdkakan inte är ätbar. Detta sker då $t \in]-\infty,35] \cup [45,\infty[$.

Olikheter av grad ett. Att lösa olikheter med grad ett är inte svårare än att lösa ut en variabel. Det enda man måste tänka på är den tredje regeln ovan så att man vänder på olikhetstecknet vid rätt tillfälle. Här följer ett par illustrerande exempel.

Exempel 3.39. *Lös följande problem:*

1. *Finn de x som uppfyller olikheten $5x - 12 > 18$.*
2. *Finn de x som uppfyller olikheterna $4x - 7 \geq 20$ och $5 - 2x \geq 7$ samtidigt.*

Lösningsförslag: Vi använder första regeln och adderar 12 till båda leden:

$$5x - 12 > 18 \Leftrightarrow 5x > 30$$

Vi kan nu multiplicera båda leden med (det positiva talet) $\frac{1}{5}$, det vill säga vi dividerar med 5.

$$5x > 30 \Leftrightarrow x > 6$$

Alltså är lösningsmängden till olikheten $6 < x$, vilket också kan skrivas som $x \in]6,\infty[$.

Vi löser det andra problemet på samma sätt för var och en av olikheterna. Den första olikheten skrivs om till

$$4x - 7 \geq 20 \Leftrightarrow 4x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{27}{4},\infty\right[,$$

och den andra olikheten skrivs om till

$$5 - 2x \geq 7 \Leftrightarrow -2 \geq 2x \Leftrightarrow -1 \geq x \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right].$$

Vi vill nu finna de x som ligger i båda dessa lösningsmängder. Men som vi kan se, så finns det inga sådana x, då inga tal kan vara större än $27/4$ samtidigt som de är mindre än -1. Alltså finns inga x som uppfyller båda olikheterna samtidigt. ★

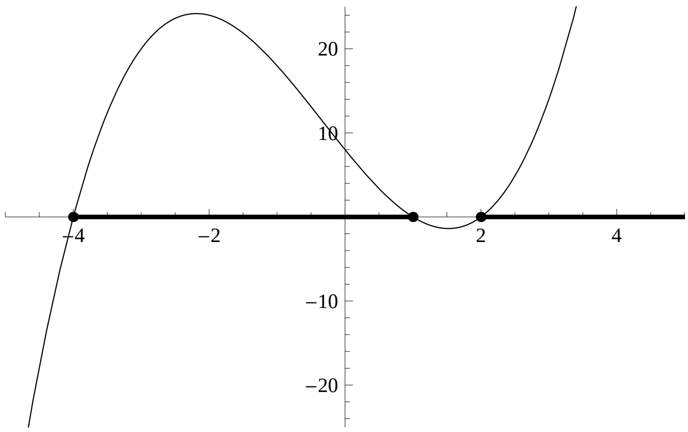
Olikheter av högre grad. Nu när vi bemästrat olikheter av första graden så angriper vi problem med högre grad. Den metod vi kommer att ha stor nytta av kallas *teckenschema* och det innebär att vi undersöker om i vilka intervall som uttryck är positiva eller negativa. Detta har stark koppling till regel två och regel tre för olikheter. Vi börjar med ett exempel:

Exempel 3.40. *Vilka x uppfyller att $(x-1)(x-2)(x+4) \geq 0$?*

Lösningsförslag: Gränserna för olikheten måste ju vara då vänsterledet är precis 0, det vill säga när $(x-1)(x-2)(x+4) = 0$. Det är alltså enbart när $x = 1$, $x = 2$ och när $x = -4$ som vi passerar en gräns för lösningsmängden. Vi tänker oss att vi är x som vandrar från $-\infty$ till ∞ och på vägen så undersöker vi vilket tecken som $(x-1)(x-2)(x+4)$ har. Är uttrycket positivt så är det x:et med i lösningen, annars inte. Men för att vandra mellan ett x som ger negativt tecken och ett som ger positivt, så måste vi ju passera de som ger oss 0. Detta ger oss ett teckenschema:

		-4		1		2	
$(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-2)(x+4)$	-	0	+	0	-	0	+

Varje rad berättar vilket tecken som uttrycket i vänsterkolumnen har. Vi ser alltså att $(x+4)$ är positivt eller noll om $x \geq -4$, och liknande för de andra två uttrycken. Vi kan nu multiplicera de tre första raderna med varandra för att få den sista raden, ("minus gånger minus blir plus"). Den sista raden ger oss då en beskrivning för vilket tecken vi har i vilket intervall, och vi avläser att $(x-1)(x-2)(x+4)$ är positivt eller noll för $-4 \leq x \leq 1$ samt $2 \leq x$. Lösningen på olikheten blir då $x \in [-4, 1] \cup [2, \infty[$.



Figur 18: $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$

★

Det första man måste göra när man löser en olikhet är alltså att faktorisera uttrycket, och därefter göra ett teckenschema. Det är inte alltid man får uttrycket färdigfaktoriserat, men man kan faktorisera dem med hjälp av faktorsatsen.

Exempel 3.41. *Vilka x uppfyller olikheten $x^2 - 5x \leq -6$?*

Lösningsförslag: Man kan lätt luras att tro att vi faktoriserar vänsterledet direkt, men vi måste ha 0 i högerledet för att kunna göra ett teckenschema. Vi skriver alltså om det som $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. För att faktorisera vänsterledet, måste vi hitta rötterna till $x^2 - 5x + 6 = 0$. Löser vi denna andragradsekvation, så finner vi att $x = 2$ och $x = 3$ är rötter. Vi kan då faktorisera vänsterledet som $(x-2)(x-3)$ (kontrollera att om du utvecklar detta så får du precis $x^2 - 5x + 6$). Detta ger oss då $(x-2)(x-3) \leq 0$ och vi ställer upp ett teckenschema:

		2		3	
$(x-2)$	-	0	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	-	0	+

Vi utläser att $(x-2)(x-3) \leq 0$ om $x \in [2, 3]$. ★

3.4.2 Absolutbelopp

Det här avsnittet handlar om absolutbeloppet. Vi börjar med definitionen

$$|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x < 0 \end{cases} \qquad \text{alternativt} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

För alla positiva tal x, så gäller det att $|x| = x$, men om x är negativt så kan man säga att absolutbeloppet ”tar bort minustecknet”. Det gäller alltså att $|x| \geq 0$ för alla x, och $|x| = 0$ endast om $x = 0$.

Absolutbeloppet är ett mått på storleken av talet oberoende av vilket tecken det har. Det kan också tolkas som det avstånd som x är från 0 på tallinjen.

Exempel 3.42. $|-1| = -(-1) = 1, \quad |-\pi| = -(-\pi) = \pi$

Exempel 3.43. *Lös följande ekvationer:*

- $|x| = 3.$
- $|x - 4| = 3.$

Lösningsförslag: När man arbetar med absolutbelopp så är det lättast att dela upp problemet i flera fall, beroende på om det vi tar absolutbelopp på är positivt eller negativt. Det är precis det vi kommer göra här. Första problemet blir då följande:

Fall 1: Om $x \geq 0$ så är $|x| = x$ och vi får att $x = 3$, vilket då enkelt är en lösning.

Fall 2: Om $x < 0$ så är$|x| = -x$ och vi får att $-x = 3$, så $x = -3$ är den andra lösningen.

Lösningen är alltså att $x = 3$ eller $x = -3$. Nu till nästa problem:

Fall 1: Om $x - 4 \geq 0$ så är $|x-4| = x - 4$ och vi får att $x - 4 = 3$, så $x = 7$ är en lösning.

Fall 2: Om $x - 4 < 0$ så är $|x - 4| = -(x-4)$ och vi får att $-(x-4) = 3$, så $x = 1$ är den andra lösningen.

Kontrollera att lösningarna stämmer genom att sätta in dem i den ursprungliga ekvationen. ★

Nu ska vi kombinera det vi lärde oss om olikheter och använda de i kombination med absolutbelopp.

Exempel 3.44. *Lös olikheten* $|x - 5| \geq 3$.

Lösningsförslag: Vi delar upp problemet i flera fall, nämligen $x - 5 \geq 0$ och $x - 5 < 0$.

Fall $x - 5 \geq 0$: Här är det inom absolutbeloppet positivt och vi ersätter absolutbeloppet med parenteser. Vi får att $(x - 5) \geq 3$ vilket ger oss $x \geq 8$. Alla dessa x uppfyller även att $x \geq 5$, vilket var en förutsättning för det här fallet. Alltså är $x \geq 8$ giltiga lösningar.

Fall $x - 5 < 0$**:** Nu får vi istället $-(x-5) \geq 3$, vilket efter multiplikation med -1 i båda leden ger $x - 5 \leq -3$. Slutligen får vi då att $x \leq 2$. Vi får då att $x \leq 2$ ger giltiga lösningar, dessa uppfyller ju också förutsättningarna att $x < 5$.

Lösningsmängden ges av $x \leq 2$ och $x \geq 8$. ★

Övningar

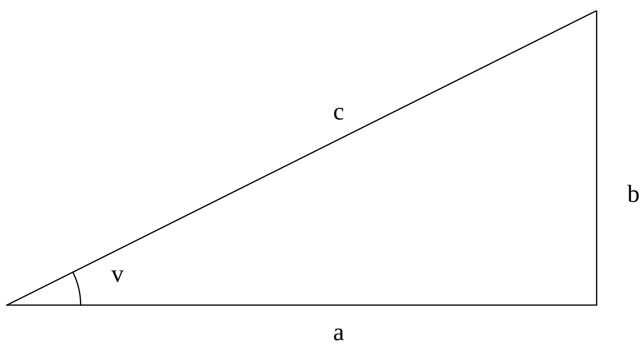
1. Lös följande olikheter
   (a) $3x + 6 > x - 8$
   (b) $x^2 + 2x > 3$
   (c) $(x-2)(x^2 + 4x + 4) \geq 0$
2. Låt f och g vara två reella funktioner definierade av $f(x) = x^2 + x - 2$ och $g(x) = 1 - 2x$. Bestäm alla skärningspunkter mellan $f : s$ och $g : s$ grafer. Rita graferna i samma figur. För vilka x är $f(x) > g(x)$?

3.5 Trigonometri

Trigonometri används i geometrin för att beräkna avstånd och vinklar, men även i många andra sammanhang. Vi börjar med en kort repetition om rätvinkliga trianglar.

3.5.1 Rätvinkliga trianglar

En rätvinklig triangel är en triangel med en rät vinkel, alltså en vinkel på 90°. Ett exempel på en rätvinklig triangel ser vi i figur 19.



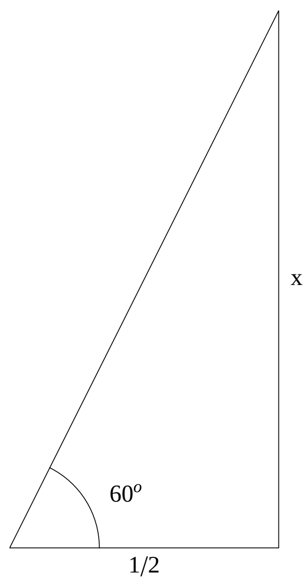
Figur 19: En rätvinklig triangel. Sidan c är triangelns hypotenusa, medan sidorna a och b är triangelns katetrar. Den räta vinkeln finns mellan sidorna a och b.

Vinkelsumman, det vill säga summan av de tre vinklarna i en triangel, är 180°. De sidor som bildar en rät vinkel mot varandra, sidorna a och b i figuren ovan, kallas katetrar och den tredje sidan, c, kallas för hypotenusan. Vi gör även skillnad mellan de båda kateterna. När vi betraktar vinkeln v säger vi att a är den närliggande kateten och b den motstående. För en rätvinklig triangel, som den i figuren ovan, finns följande definierade funktioner mellan vinkeln v och kvoter av sidorna enligt nedan:

$$\begin{aligned}
\tan v &= \frac{b}{a} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \\
\sin v &= \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \\
\cos v &= \frac{a}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}
\end{aligned}$$

$\tan v$ utläses "tangens för vinkeln v", $\sin v$ "sinus för vinkeln v" och $\cos v$ utläses "cosinus för vinkeln v".

Exempel 3.45. *Finn ett uttryck för x i figur 20 med hjälp av någon av de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens.*



Figur 20: En rätvinklig triangel där det är möjligt att bestämma sidan x med hjälp av trigonometriska funktioner.

Lösningsförslag: Enligt definitionen av tangens ser vi att

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}}.$$

Vi kan multiplicera med $\frac{1}{2}$ på båda sidorna om likhetstecknet och får

$$\frac{\tan 60^\circ}{2} = x.$$

För att kunna beräkna x exakt måste vi veta värdet på $\tan 60^\circ$. ★

Vi kommer lära oss sinus, cosinus och tangens för vissa standardvinklar, till exempel 60°. Men först ska vi studera vinkelbegreppet.

3.5.2 Vinkelbegreppet

Vi har nu stött på en nittiogradersvinkel och en sextiogradersvinkel och vi har då mätt vinklarna i grader. Men hur definieras en vinkel egentligen? Och kan man mäta vinklar i andra enheter än grader?

För att ge en god definition introducerar vi nu den så kallade *enhetscirkeln* och begreppet *radianer*. Enhetscirkeln är en cirkel med medelpunkt i origo och med radie 1. Vi påminner om att en cirkel med radie r har omkrets $2\pi r$, så enhetscirkeln kommer att ha omkrets 2π.

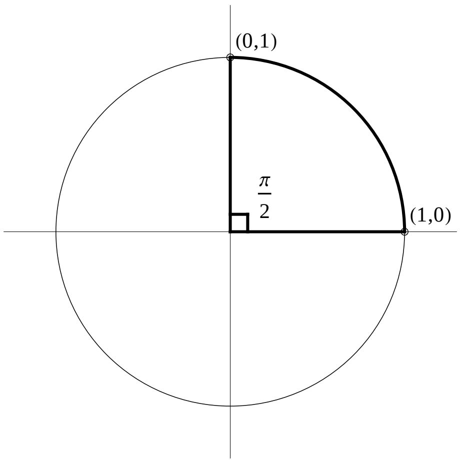
Tag nu en godtycklig rät linje som utgår från origo. Linjen kommer att skära cirkeln i en punkt. Vinkeln mellan linjen och den positiva x-axeln, mätt i radianer, definieras som längden på cirkelbågen som går från vår punkt till punkten $(1, 0)$.

Exempel 3.46. *Bestäm vinkeln i radianer mellan den positiva x-axeln och den positiva y-axeln.*

Lösningsförslag:

Eftersom längden på cirkelbågen mellan punkten $(0, 1)$ och $(1, 0)$ är en fjärdedel av cirkelns omkrets så kommer vinkeln att vara $2\pi/4 = \pi/2$ radianer, se Figur 21. Lägg märke till att vinkeln $\pi/2$ motsvaras av vinkeln $90°$.

★



Figur 21: Enhetscirkeln och vinkeln $\pi/2$.

Exempel 3.47. *Ange vinkeln $45°$ i radianer.*

Lösningsförslag: Längden på cirkelbågen utgör en åttondel av cirkelns omkrets. Vinkeln blir därför $2\pi/8 = \pi/4$ radianer, se Figur 22.

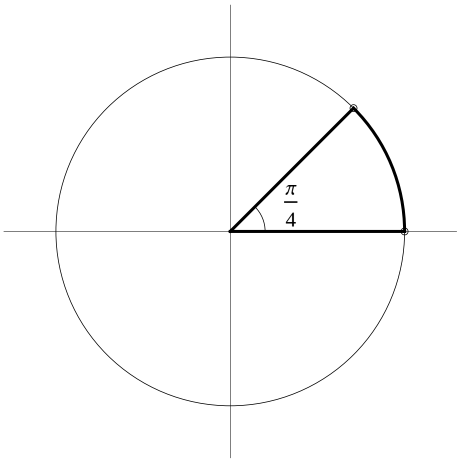
★

Exempel 3.48. *Ange vinkeln mellan den linje som går från origo genom punkten $(0, -1)$ och den linje som går från origo genom punkten $(1, 0)$.*

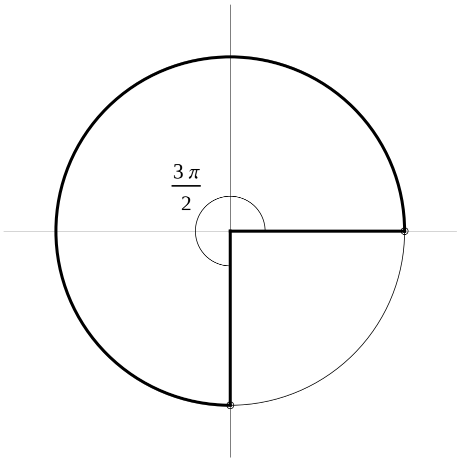
Lösningsförslag: Punkterna ligger på enhetscirkeln. Längden på cirkelbågen utgör tre fjärdedelar av cirkelns omkrets. Vinkeln blir därför $2\pi \cdot 3/4 = 3\pi/2$ radianer, se Figur 23. Denna vinkel svarar mot $270°$. ★

3.5.3 De trigonometriska funktionerna och enhetscirkeln

Varje punkt $p = (x, y)$ i första kvadranten (där både x och y är positiva) på enhetscirkeln formar en triangel, se Figur 24.



Figur 22: Enhetscirkeln och vinkeln $\pi/4$.



Figur 23: Enhetscirkeln och vinkeln $3\pi/2$.

Triangeln är rätvinklig och eftersom punkten ligger på enhetscirkeln har hypotenusan längd ett. Vi ser också att vinkeln ligger mellan 0 och $\pi/2$, eller 0 och 90° mätt i grader. Med våra tidigare definitioner av tangens, cosinus och sinus får vi sambanden

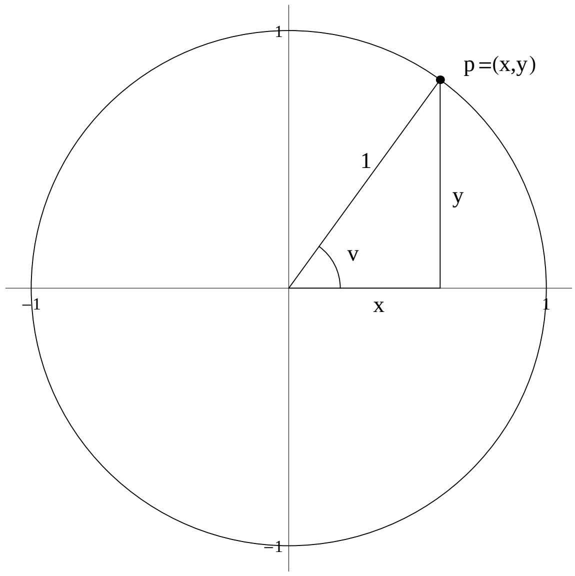
$$\begin{aligned} \tan v &= \frac{y}{x}, \\ \sin v &= \frac{y}{1} = y, \text{och} \\ \cos v &= \frac{x}{1} = x. \end{aligned}$$

Vi noterar här att

$$\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

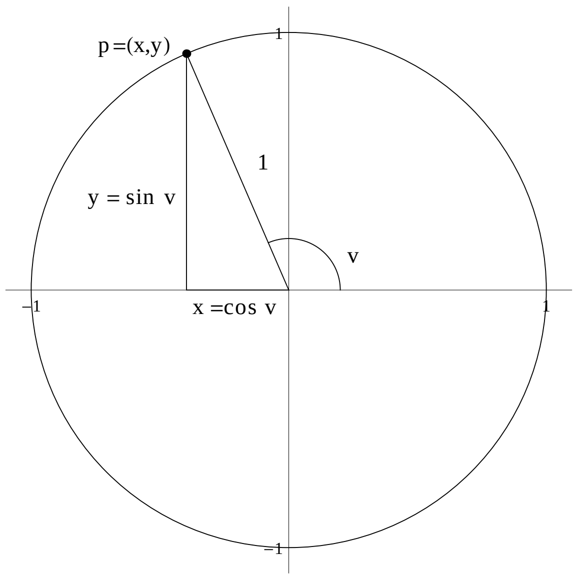
Vi kan alltså tolka cosinus av vinkeln v som x-koordinaten för punkten, och sinus av vinkeln som y-koordinaten för punkten. Det visar sig att denna tolkning kan användas som definition av cosinus och sinus för alla typer av vinklar.

Definition: Låt v vara en vinkel och låt l vara en linje som bildar vinkeln v med x-axeln. Då är $\cos v$ x-koordinaten för den punkt där l skär enhetscirkeln, $\sin v$ är y-koordinaten för samma punkt och $\tan v = \sin v / \cos v$.



Figur 24: En punkt $p = (x, y)$ i första kvadranten av enhetscirkeln.

Definitionen illustreras i Figur 25



Figur 25: En punkt $p = (x, y)$ i andra kvadranten av enhetscirkeln.

Exempel 3.49. *Bestäm* $\sin \pi$.

Lösningsförslag: Vi söker y-koordinaten för skärningspunkten mellan enhetscirkeln och linjen som bildar vinkeln π radianer med den positiva delen av x-axeln. Eftersom π svarar mot ett halvt varv blir skärningspunkten $(-1, 0)$. Det gäller alltså att $\sin \pi = 0$.

★

Exempel 3.50. *Bestäm* $\cos \pi$.

Lösningsförslag: Vi söker nu istället x-koordinaten för punkten $(-1, 0)$, så $\cos \pi = -1$. ★

På högskolan brukar man mäta vinklar i radianer, men det är viktigt att behärska både radian- och gradbegreppet. För att omvandla grader till radianer multiplicerar man med omvandlingsfaktorn $\pi/180$ och för att omvandla radianer till grader multiplicerar man med omvandlingsfaktorn $180/\pi$.

Exempel 3.51. *Omvandla vinkeln* $330°$ *till radianer.*

Lösningsförslag: Vinkeln mätt i radianer blir $330 \cdot \pi/180 = \dfrac{11\pi}{6}$. ★

Nedan visas en översättningstabell för några vanliga vinklar.

radianer	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
grader	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$

3.5.4 Standardvinklar

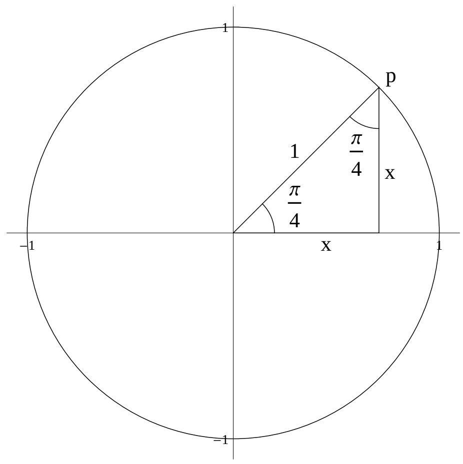
Låt oss nu bestämma sinus- och cosinusvärdena för några speciella vinklar. Vi väljer att arbeta i radianer, men kommer att presentera sinus- och cosinusvärdena för standardvinklarna i en tabell där vi även ger vinklarna mätta i grader.

Vi börjar med att notera att $\sin \pi/2 = 1$ eftersom vi vid ett kvarts varv är i punkten $(0, 1)$. På samma sätt har vi också att

$$\cos \pi/2 = 0, \quad \sin 0 = 0 \quad \text{och} \quad \cos 0 = 1.$$

Låt oss nu undersöka vinkeln $\pi/4$. Vi ritar in vinkeln i enhetscirkeln och skriver in en hjälptriangel, se Figur 26.

Eftersom vinkelsumman i en triangel är π radianer och vi har en vinkel på $\pi/4$ och en på $\pi/2$ måste även den sista vinkeln vara $\pi/4$. Det följer på grund av symmetri att de båda kateterna är lika långa.



Figur 26: Vinkeln $\pi/4$ och en i enhetscirkeln inskriven hjälptriangel. På grund av symmetri har de båda kateterna samma längd x.

Vi kan nu använda Pythagoras sats för att ta reda på sträckan x och vi får ekvationen

$$x^2 + x^2 = 1.$$

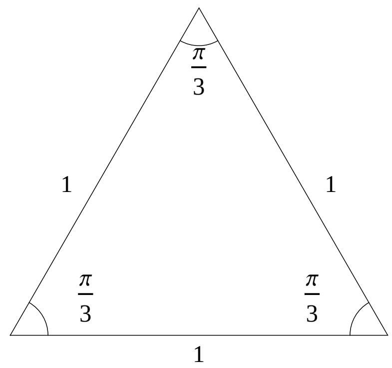
Alltså har vi $2x^2 = 1$, eller $x^2 = 1/2$ vilket ger lösningarna

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Det negativa svaret kan vi bortse ifrån eftersom att en sträcka alltid är positiv. Sträckan x i Figur 26 är därför $1/\sqrt{2}$. Det innebär att skärningspunkten p har koordinaterna $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Vi får alltså

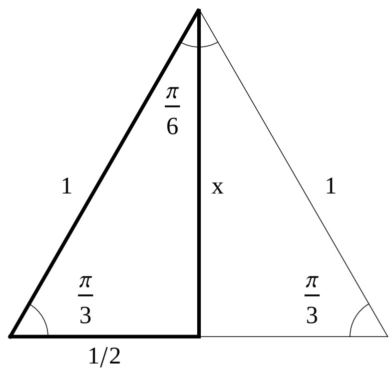
$$\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}, \quad \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2} \quad \text{och} \quad \tan\pi/4 = 1.$$

Vi går nu vidare till vinklarna $\pi/6$ och $\pi/3$. Betrakta den liksidiga triangeln i Figur 27. Alla



Figur 27: En liksidig triangel med sidan 1.

sidor har längd 1 och därmed är alla vinklar lika stora, det vill säga $\pi/3$. Om vi delar en av vinklarna i triangeln mitt i tu får vi en vinkel på $\pi/6$, se Figur 28.



Figur 28: En liksidig triangel med sidan 1 samt en tudelning av den övre vinkeln. Den obekanta sidan x kan bestämmas med hjälp av Pythagoras sats.

Betrakta nu den fetmarkerade triangeln i Figur 28. Vi kan med hjälp av Pythagoras sats ställa upp en ekvation för den obekanta sidan. Det gäller ju att

$$x^2 + (1/2)^2 = 1^2,$$

vilket ger lösningarna

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Återigen kan vi bortse från det negativa värdet eftersom vi söker en sträcka. Genom att använda att sinus definieras som förhållandet mellan motstående katet och hypotenusan får vi att

$$\sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

På motsvarande sätt kan vi genom att använda att cosinus definieras som förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusan få att

$$\cos \pi/3 = \frac{1}{2}/1 = 1/2.$$

Slutligen kan vi bestämma tangensvärdet som kvoten mellan sinus- och cosinusvärdet, det vill säga

$$\tan \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Figur 28 kan även användas för att bestäma de trigonometriska funktionernas värden för vinkeln $\pi/6$. Vi får

$$\sin \pi/6 = \frac{1}{2}/1 = 1/2,$$
$$\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan \pi/6 = \frac{1}{2}/\frac{\sqrt{3}}{2} = 1/\sqrt{3}.$$

Vi sammanfattar våra resultat i en tabell:

Grader	Radianer	sin	cos	tan
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	odef

3.5.5 Samband mellan cosinus och sinus för olika vinklar

Som vi tidigare har utnyttjat kan vi använda Pythagoras sats på en rätvinklig triangel med sidorna x och y i enhetscirkeln och får

$$1^2 = x^2 + y^2.$$

Eftersom $x = \cos v$ och $y = \sin v$ får vi sambandet

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

som är en viktig identitet kallad *trigonometriska ettan:*. Observera att vi skriver $\cos^2 v$ och $\sin^2 v$ istället för $(\cos v)^2$ och $(\sin v)^2$.

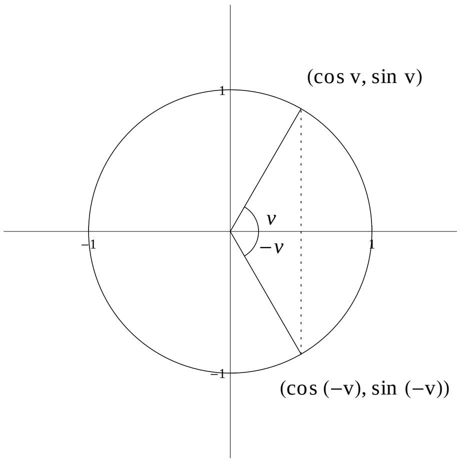
Vi fortsätter med att betrakta $\cos v$ och $\cos(-v)$, för att se ett samband mellan dem. Vi ritar in vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln, se Figur 29.

När vi avläser cosinus för en vinkel tittar vi på x-koordinaten. Om vi jämför x-koordinaterna för vinklarna v och $-v$ ser vi att de är lika. Vi får att

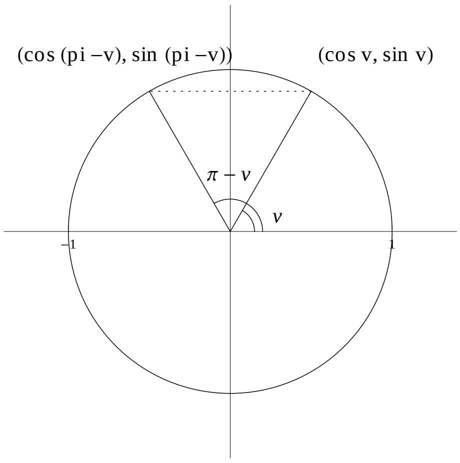
$$\cos(v) = \cos(-v).$$

Rita gärna in en vinkel v i en annan kvadrant för att övertyga dig själv om att formeln gäller även då. Om vi jämför y-koordinaterna ser vi att de är teckenskilda, vilket betyder att

$$\sin(v) = -\sin(-v).$$



Figur 29: Vinklarna v och $-v$ i enhetscirkeln. De punkter där de båda linjerna skär enhetscirkeln har samma x-koordinat, det vill säga $\cos v = \cos(-v)$. Punkternas y-koordinater skiljer sig endast med ett tecken, det vill säga $\sin v = -\sin(-v)$.



Figur 30: Vinklarna v och $\pi - v$ i enhetscirkeln. De punkter där de båda linjerna skär enhetscirkeln har samma y-koordinat, det vill säga $\sin v = \sin(\pi - v)$. Punkternas x-koordinater skiljer sig endast med ett tecken, det vill säga $\cos v = -\cos(\pi - v)$.

Vi går nu vidare till att titta på vinklarna v och $\pi - v$ för att se ett samband mellan de båda vinklarnas sinus- och cosinusvärden. Vi ritar in en godtycklig vinkel v i enhetscirkeln, samt vinkeln $\pi - v$, se Figur 30.

För att avläsa sinusvärdet för en vinkel v i enhetscirkeln tittar vi på y-koordinaten där linjen nuddar cirkeln. Jämför vi y-koordinaterna för v och $\pi - v$ ser vi att de är lika. Motsvarande studie för x-koordinaterna avslöjar att de skiljer sig endast med tecken. Det gäller alltså att

$$\sin v = \sin(\pi - v) \text{ och att } \cos v = -\cos(\pi - v).$$

Sammanfattningsvis har vi följande samband:

$$\begin{aligned}
\cos^2 v + \sin^2 v &= 1\\
\cos v &= \cos(-v)\\
\sin v &= -\sin(-v)\\
\cos v &= -\cos(\pi - v) \quad (\text{eller } \cos v = -\cos(180^\circ - v))\\
\sin v &= \sin(\pi - v) \quad (\text{eller } \sin v = \sin(180^\circ - v)).
\end{aligned}$$

Exempel 3.52. *Bestäm* $\sin(5\pi/6)$.

Lösningsförslag: Vi har $5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Alltså är

$$\sin(5\pi/6) = \sin(\pi - \pi/6) = \sin \pi/6 = 1/2.$$

★

3.5.6 Triangelsatserna

I det här avsnittet kommer vi lära oss tre viktiga triangelsatser, nämligen areasatsen, cosinussatsen och sinussatsen. Vi kommer att använda oss av det klassiska vinkelbegreppet i detta avsnitt, men det går så klart även bra att mäta vinklarna i radianer.

Areasatsen Som du säkert kommer ihåg kan arean av en triangel beräknas med formeln

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

där b står för basen och h för höjden i triangeln.

Exempel 3.53. *Beräkna arean av en triangel med basen 5 cm och höjden 10 cm.*

Lösningsförslag: Vi använder formeln ovan.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm}^2.$$

★

Det areasatsen säger är hur man beräknar arean av en triangel när man känner till två sidor och den mellanliggande vinkeln. Låt oss med ett exempel visa hur man kommer fram till areasatsen.

Exempel 3.54. *Beräkna arean av en triangel där vi känner till två sidor, a och b samt dess mellanliggande vinkel v under antagande att vinkeln är spetsig.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att rita upp en triangel (se Figur 31) och rita in höjden. Vi kan då skriva

$$\sin v = \frac{h}{b},$$

och alltså är höjden $h = b \cdot \sin v$. Vi kan nu använda formeln vi hade tidigare för att beräkna arean:

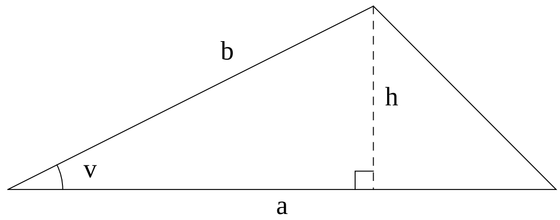
$$A = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$$

★

Samma resonemang kan utföras även då vinkeln v är trubbig, vilket ger areasatsen.

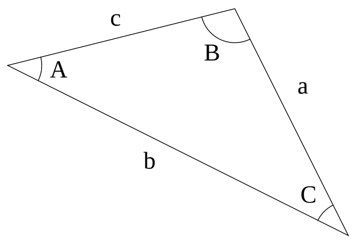
Sats 9. *Arean A av en triangel där vi känner till två sidor a och b samt dess mellanliggande vinkel v ges av sambandet*

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}.$$



Figur 31: En triangel med de två sidorna a och b och dess mellanliggande vinkel v.

Sinussatsen För en triangel ABC med sidorna abc enligt Figur 32 gäller följande enligt sinussatsen:



Figur 32: En triangel ABC med sidorna abc.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Man kan visa sinussatsen från areasatsen, men vi utelämnar beviset.

Cosinussatsen Då en triangel ABC saknar en rät vinkel kan vi inte tillämpa Pythagoras sats. Däremot gäller sambandet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

där a betecknar motstående sida till vinkeln A och så vidare, se Figur 32. Vi kommer inte ta upp beviset av denna sats.

Exempel 3.55. *Vad känner vi igen cosinussatsen som när vinkeln C är en rät vinkel?*

Lösningsförslag: Om C är 90° gäller

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cosC = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2,$$

vilket vi känner igen som Pythagoras sats. Pythagoras sats är alltså ett specialfall av cosinussatsen. ★

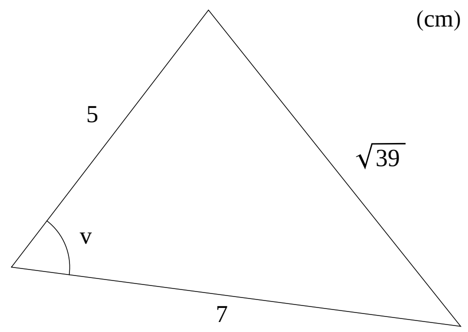
Exempel 3.56. *Beräkna vinkeln v i Figur 33.*

Lösningsförslag: Enligt cosinussatsen har vi

$$\sqrt{39}^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos v$$

vilket vi kan skriva om som

$$1/2 = \cos v.$$



Figur 33: En triangel med en obekant vinkel v som kan bestämmas med hjälp av cosinussatsen.

I vårt fall ger detta att $v = 60°$. ★

Sammanfattningsvis har vi följande triangelsatser:

Areasatsen: $A = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$

Sinussatsen: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

3.5.7 Trigonometriska funktioner

Tidigare har vi bara beräknat värdet för cosinus och sinus för vinklar i intervallet $[0, 2\pi]$ eller $[0°, 360°]$. Vi ska nu definiera cosinus och sinus på andra intervall.

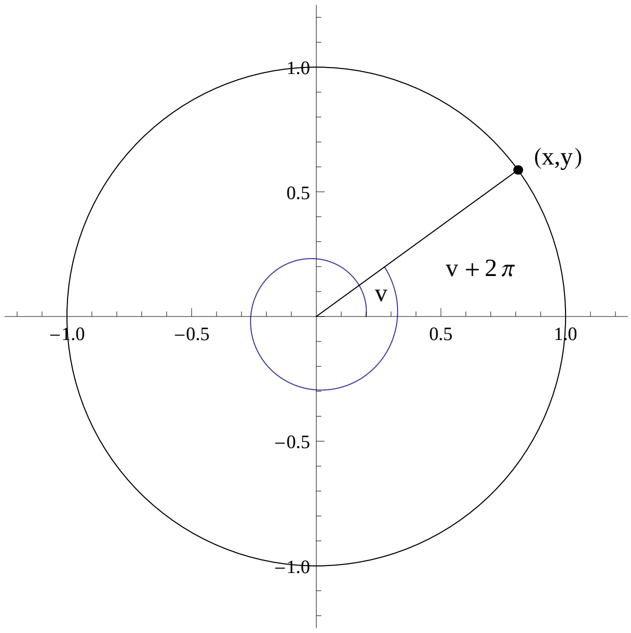
Periodiska funktioner *Om vi tänker oss en vinkel på enhetscirkeln och till den vinkeln adderar ett varv, det vill säga 2π, hur förändras då sinus- och cosinusvärdena?* Eftersom de trigonometriska funktionernas värden för en vinkel definieras av x och $y-$koordinaterna för en punkt på enhetscirkeln gäller det att ta reda på vilken punkt vi hamnar vid när vi till en vinkel adderar ett varv. Vi ser att vi hamnar vid precis samma punkt. Detta illustreras i Figur 34. Tänk dig exempelvis att du springer på en löparbana med formen av en cirkel. När du springer ett varv är du alltid tillbaka på samma ställe som du började. På samma sätt kommer du tillbaka till samma ställe om du springer 10 varv, oavsett om du springer motsols eller medsols. Vi får följande trigonometriska samband:

$$
\begin{aligned}
\sin v &= \sin(v + n \cdot 2\pi) \\
\cos v &= \cos(v + n \cdot 2\pi),
\end{aligned}
$$

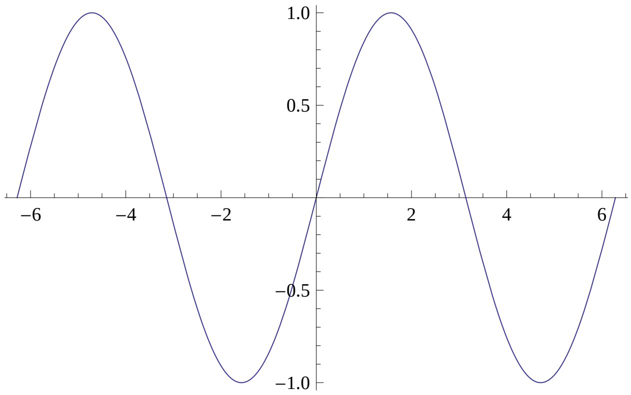
där n är ett heltal (som alltså både kan vara negativt och positivt) som anger antalet varv. Vi säger att sinus och cosinus är periodiska funktioner med perioden 2π (eller $360°$.) Graferna för funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ finns i Figur 35 och i Figur 36.

Med hjälp av Figur 37 får vi följande formler som är till hjälp då vi ska bestämma perioden för tangens:

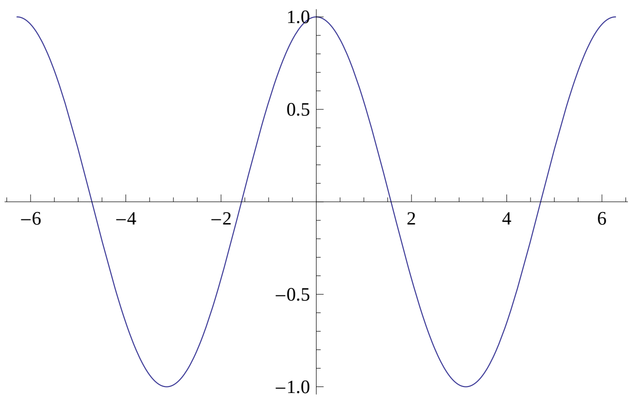
$$
\begin{aligned}
\sin(v + \pi) &= -y = -\sin v \\
\cos(v + \pi) &= -x = -\cos v
\end{aligned}
$$



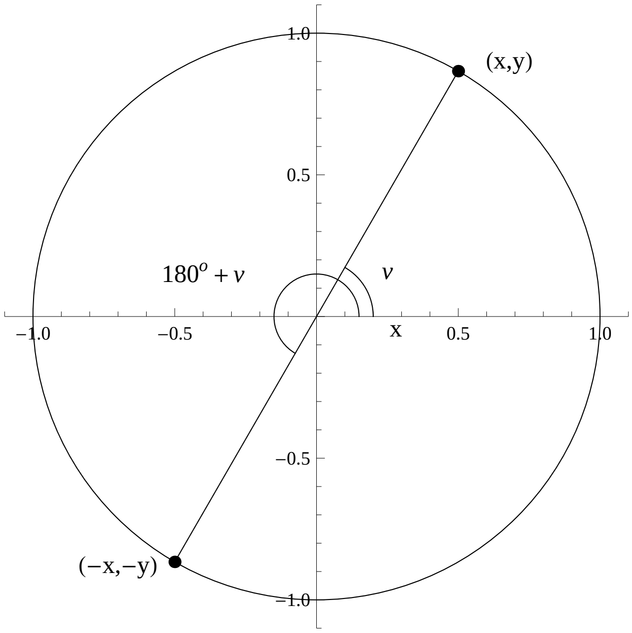
Figur 34: I bilden ser vi en vinkel v samt vinkeln $v + 2\pi$.



Figur 35: Grafen till funktionen $f(x) = \sin x$ på intervallet $[-6, 6]$.



Figur 36: Grafen till funktionen $f(x) = \cos x$ på intervallet $[-6, 6]$.

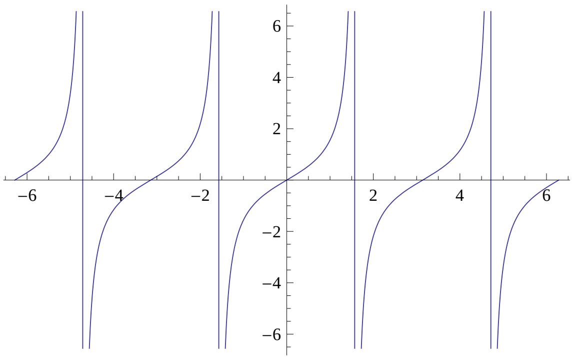


Figur 37: En illustration av sambandet mellan sinus- och cosinusvärdena för en vinkel v samt vinkeln $v + 180°$.

Vi får

$$\tan(v+\pi) = \frac{\sin(v+\pi)}{\cos(v+\pi)} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v.$$

Detta innebär att tangensfunktionen är periodisk med perioden π och alltså gäller $\tan(v + n\cdot\pi) = \tan v$. Grafen till tangensfunktionen finns ritad i Figur 38.



Figur 38: Grafen till funktionen $f(x) = \tan x$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ minus punkterna $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ och $5\pi/2$ där $\tan x$ är odefinierad.

Exempel 3.57. *Beräkna* $\cos 225°$.

Lösningsförslag: Vi har

$$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

eftersom

$$\cos(180° + v) = -\cos v.$$

★

Exempel 3.58. *Bestäm* $\cos(5\pi/3)$.

Lösningsförslag: Vi har $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$. Alltså är

$$\cos(5\pi/3) = \cos(2\pi - \pi/3) = \cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

★

3.5.8 Trigonometriska ekvationer

Exempel 3.59. *Bestäm samtliga lösningar till* $\sin v = \frac{1}{2}$. *Svara både i grader och i radianer.*

Lösningsförslag: Vi utför räkningarna i radianer och omvandlar sedan resultatet till grader. För att bestämma samtliga lösningar är det mycket att tänka på. Först måste vi veta någon vinkel v som uppfyller $\sin v = \frac{1}{2}$. En sådan är $\pi/6$. Vi måste också komma ihåg att $\sin v = \sin(\pi - v)$ vilket innebär att även $v = 5\pi/6$ är en lösning till ekvationen. Slutligen får vi inte glömma att $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$, där n är ett heltal. Alltså får vi att samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$\pi/6 + n \cdot 2\pi \text{ och } 5\pi/6 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

vilket är

$$30^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ och } 150^\circ + n \cdot 360^\circ$$

uttryckt i grader. ★

Exempel 3.60. *Hur många lösningar har ekvationen* $\cos v = \frac{1}{2}$ *i intervallet* $[\pi, 3\pi]$*?*

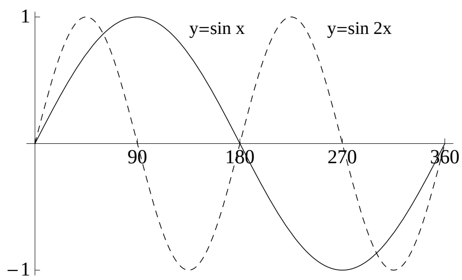
Lösningsförslag: Sen tidigare vet vi att en lösning till ekvationen är $\pi/3$. Eftersom $\cos v = \cos(-v)$ så är även $-\pi/3$ en lösning. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså $\pm\pi/3 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Om $n = 1$ så ger det oss lösningarna $\pi/3 + 2\pi$ och $2\pi - \pi/3$, vilka ligger i det aktuella intervallet. Om $n \leq 0$ eller $n \geq 2$ så hamnar lösningarna utanför intervallet. Antalet lösningar är därför 2. ★

Exempel 3.61. *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* $\cos^2 v - 3\cos v/2 + 1/2 = 0$.

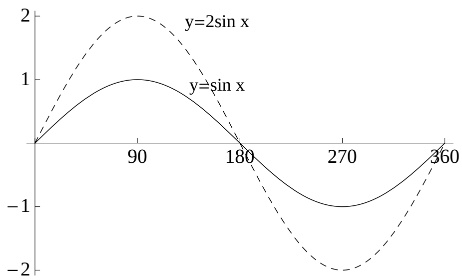
Lösningsförslag: Vi börjar med att sätt $y = \cos v$. Detta ger oss ekvationen $y^2 - 3y/2 + 1/2 = 0$ som har lösningarna $y = 1/2$ och $y = 1$. Från den föregående uppgiften vet vi att $\cos v = 1/2$ har lösningarna $\pm\pi/3 + 2n\pi$. Ekvationen $\cos v = 1$ har lösningarna $v = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Lösningarna till ekvationen ges alltså av $\pm\pi/3 + n \cdot 2\pi$ och $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ★

Period, amplitud och fasförskjutning. Nu ska vi titta på funktioner av typen $A\sin(Bx - C)$ och $A\cos(Bx - C)$, där A, B och C är konstanter. Vi väljer att mäta vinklarna med grader genom hela detta kapitel. Vi har tidigare pratat om perioden av $\sin x$ och $\cos x$. Vi ska nu se vad som händer med perioden om vi istället undersöker funktioner av typen $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$. Vi börjar med att betrakta $\sin x$ och $\sin 2x$ för att jämföra dem. Vi vet sedan tidigare att $\sin x$ har perioden 360° vilket innebär att sinuskurvan upprepar sig efter 360°. De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$ är uppritade i Figur 39.

Vi ser att $\sin 2x$ upprepar sig redan efter 180°. Och det visar sig att $\sin 2x$ har perioden 180°. Allmänt gäller att $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$ har perioden $\frac{360^\circ}{B}$. I Figur 39 ser vi också att funktionen



Figur 39: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$.

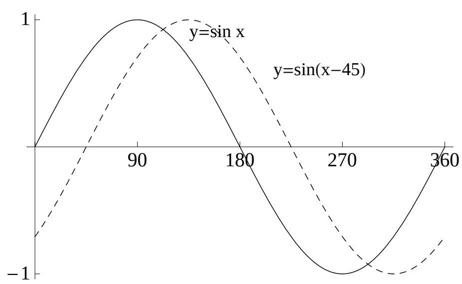


Figur 40: De båda kurvorna $\sin x$ och $2 \sin x$.

$\sin x$ antar värden mellan -1 och 1. Man säger att $\sin x$ har amplitud 1. Vi jämför nu $\sin x$ med $2 \sin x$, se Figur 40.

Vi ser att de båda kurvorna har samma period men $2 \sin x$ antar värden mellan -2 och 2. Man säger att $2 \sin x$ har *amplitud* 2. Allmänt gäller att $A \sin x$ och $A \cos x$ har amplitud $|A|$.

Kvar har vi *fasförskjutning*. Betrakta Figur 41 där vi ser de båda funktionerna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.



Figur 41: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.

De båda kurvorna har samma utseende förutom att $\sin(x - 45°)$ är förskjuten $45°$ åt höger i x-led. Allmänt gäller att $\sin(x - C)$ och $\cos(x - C)$ har en fasförskjutning på C längdenheter åt höger om C är positivt och åt vänster om C är negativt.

Vi kan nu bestämma period, amplitud och fasförskjutning för funktioner på formen $A \sin(Bx + C)$ och $A \cos(Bx + C)$ där A, B och C är konstanter.

Exempel 3.62. *Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för funktionen* $3 \cos(2x - 30°)$.

Lösningsförslag: Amplituden kan direkt avläsas till 3 och perioden till $180°$. För att bestämma fasförskjutningen vill vi veta hur mycket x förskjuts och inte hur mycket $2x$ förskjuts. Fasförskjutningen blir alltså *inte* $30°$. Vi gör en omskrivning för att kunna avläsa fasförskjutningen. $3 \cos(2x - 30°) = 3 \cos(2(x - 15°))$. Fasförskjutningen blir alltså $15°$ till höger i x-led. ★

3.5.9 Polär framställning av komplexa tal

Tidigare har vi lärt oss att ange komplexa tal på formen $a + bi$. Vi kommer nu införa något som kallas *polära koordinater* för att ange komplexa tal. De polära koordinaterna bygger på att man anger hur långt från origo punkten ligger samt i vilken riktning.

Låt $z = a + bi$. I det första kapitlet införde vi beteckningen $\bar{z}$ för det komplexa talet $a - bi$ och vi såg att $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ genom att använda konjugatregeln. Vi definierar nu absolutbeloppet av det komplexa talet z som

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observera att om $b = 0$ så överensstämmer definitionen av detta absolutbelopp med det vanliga absolutbeloppet.

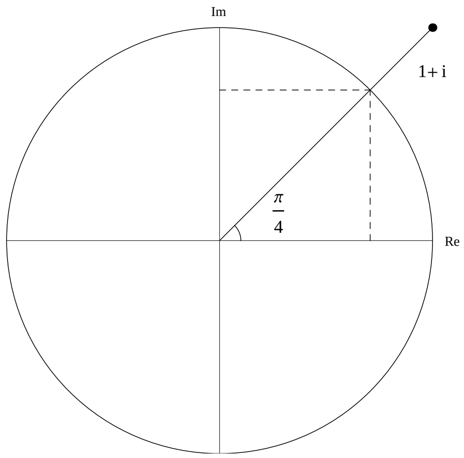
Exempel 3.63. *Låt $z = 1 + i$. Då är*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Det komplexa talet $z = a + bi$ definierar en punkt (a, b) i det komplexa talplanet. Talet $r = |z|$ betecknar då avståndet till origo, det vill säga $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumentet till z, betecknat $\arg(z)$, är vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten (a, b).

Exempel 3.64. *Argumentet till $z = 1 + i$ är $\pi/4$ eftersom vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten $(1, 1)$ är $\pi/4$, se Figur 42.*



Figur 42: Punkten $z = 1 + i$ och enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

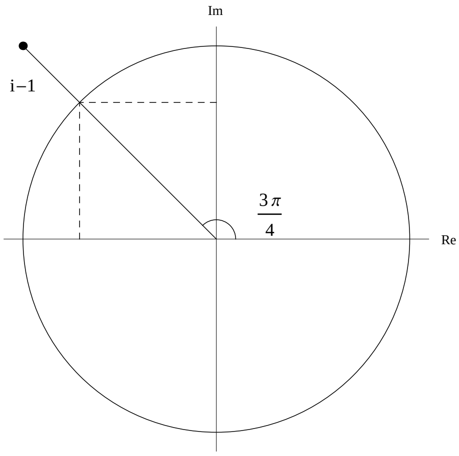
Exempel 3.65. *Argumentet till $z = i - 1$ är $3\pi/4$ eftersom vinkeln mellan linjen genom origo till punkten $(-1, 1)$ och den positiva reella linjen är $\pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$, se Figur 43.*

Det komplexa talet $z = a + bi$ kan alltså skrivas som

$$r(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))),$$

där r som vanligt är lika med $|z|$. Denna framställning kallas *polär form*. Lägg märke till att i specialfallet när $r = 1$ så ligger (a, b) på enhetscirkeln.

Exempel 3.66. *Skriv $z = i - 1$ på polär form.*



Figur 43: Punkten $z = i - 1$ och enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

Lösningsförslag: Vi har tidigare sett att argumentet till z är $3\pi/4$. Eftersom absolutbeloppet av $i - 1$ är $\sqrt{2}$ så gäller det att

$$z = \sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4).$$

★

Exempel 3.67. *Det komplexa talet $z = 3 + 3i$ kan skrivas på formen $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Bestäm r och θ.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att beräkna absolutbeloppet av z och får

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

Vinkeln från origo till punkten $(3, 3)$ är $\pi/4$. Det komplexa talet z kan alltså skrivas som

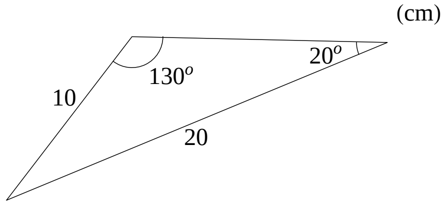
$$3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

på polär form. Vi ser att $r = 3\sqrt{2}$ och att $\theta = \pi/4$.

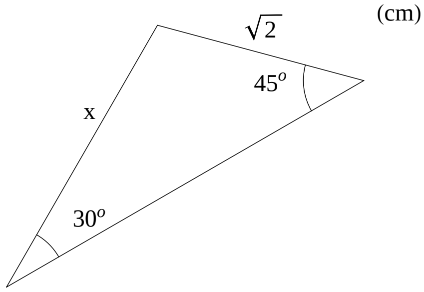
★

Övningar

1. Visa att $\sin(90° - v) = \cos v$ och $\cos(90° - v) = \sin v$. *Ledning: Rita upp en rätvinklig triangel med en vinkel v och en vinkel $90° - v$.*
2. Beräkna arean av triangeln i Figur 44.
3. Beräkna längden av den med x markerade sidan i Figur 45.
4. Beräkna exakt
   (a) $\sin(-30°)$
   (b) $\sin 420°$
   (c) $\cos(-720°)$
5. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos^2 v = \frac{1}{2}$. Svara i grader.



Figur 44: En triangel där vi vet två sidor och kan beräkna den mellanliggande vinkeln.



Figur 45: Längden av sidan x i figuren kan beräknas med en av triangelsatserna.

6. Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för $5\sin(\frac{1}{3}x + 15)$.
7. Beräkna $\sin\frac{\pi}{6}$.
8. Lös ekvationen $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Svara i radianer.
9. Skriv på polär form.
   (a) $1 + i$
   (b) $1 - i$

3.6 Gränsvärden

Gränsvärden används dels för att studera hur reella funktioner uppför sig nära punkter där de är odefinierade, dels för att studera hur funktioner beter sig för stora värden på argumentet.

3.6.1 Beteenden nära en punkt där $f(x)$ är odefinierbar

Låt $f(x)$ vara en reell funktion. Om man vill säga att $f(x)$ närmar sig ett värde L då x närmar sig en punkt a så skriver man

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

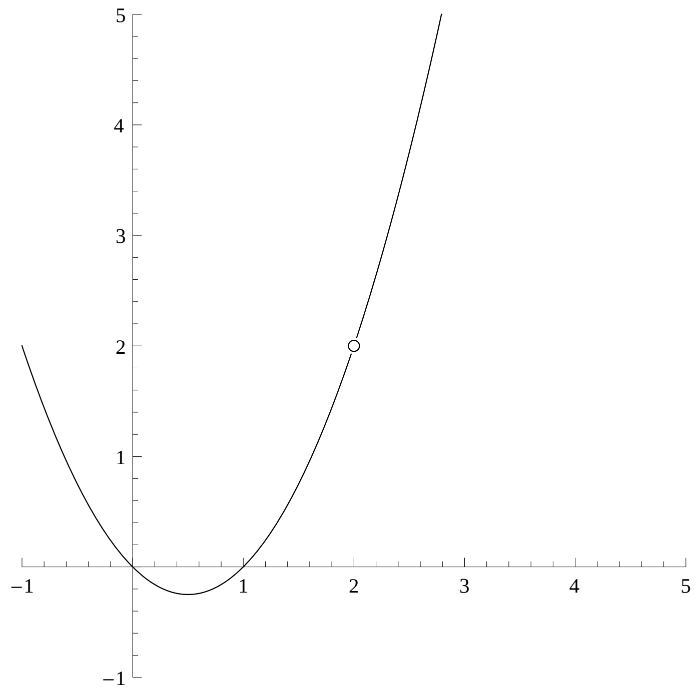
vilket brukar läsas ”$f(x)$ har gränsvärdet L då x går mot a”.

Om $f(x)$ har gränsvärdet L då $x \to a$ så menar man underförstått att $f(x)$ har samma gränsvärde oberoende av om x närmar sig a från höger eller från vänster på den reella tallinjen.

Betrakta den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2},$$

se Figur 46.



Figur 46: Grafen till $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}$ i intervallet $[-1, 5]$. När $x = 2$ är funktionen odefinierad.

Eftersom nämnaren är noll när $x = 2$ så är f odefinierad i den punkten. Men studerar vi grafen till f så ser det ut som att $f(2)$ är lika med 2. Vi ska nu beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 2} f(x).$$

Vi provar med att faktorisera täljaren. Först noterar vi att $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$ och med kvadratkomplettering kan vi skriva om $x^2 - 3x + 2$ som $(x - 1)(x - 2)$. Det gäller alltså att

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}.$$

Nu kan det vara lockande att dela både nämnare och täljare med $x - 2$, men

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2} \quad \text{och} \quad x(x-1)$$

definierar endast samma funktion om x är skild från 2.

Däremot är

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x(x-1)$$

eftersom x endast närmar sig värdet 2, men aldrig antar detta värde.

Själva gränsövergången blir inte svår. Vi får

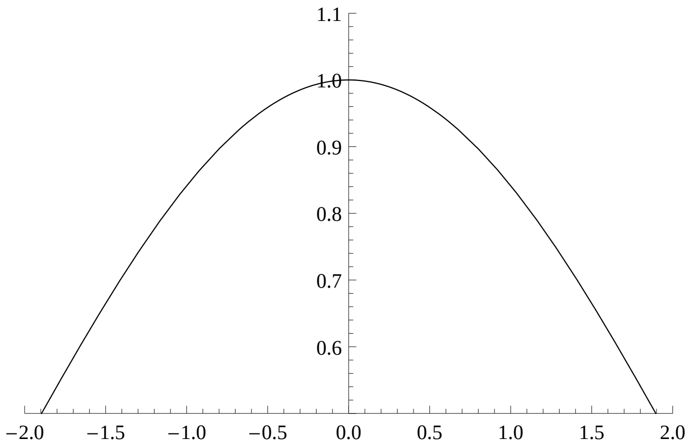
$$\lim_{x \to 2} x(x-1) = 2(2-1) = 2.$$

Vi har alltså visat att $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

Om exemplet ovan kändes trivialt så är följande klassiska exempel kanske mer förvånande. Definitionsmängden till funktionen $\frac{\sin x}{x}$ är $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. men det visar sig att när funktionen närmar sig noll från höger på tallinjen så närmar sig funktionens värde talet 1. Samma ska gäller när vi rör oss från vänster på tallinjen. Det gäller faktiskt att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

En graf av funktionen $\sin x/x$ visas i figur Figur 47. Observera dock att $\frac{\sin x}{x}$ fortfarande inte är definierat i $x = 0$.



Figur 47: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ på vardera sidor om $x = 0$

3.6.2 Gränsvärden när x går mot oändligheten

Att x går mot oändligheten skriver vi som $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Betrakta den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Först och främst kan vi dra slutsatsen att funktionen är definierad över hela $\mathbb{R}$ eftersom nämnaren $x^2 + 1$ aldrig kan vara lika med noll. Hur uppför sig då funktionen? Vi kan notera att

$$f(-a) = \frac{2(-a)^2 - 1}{(-a)^2 + 1} = \frac{2a^2 - 1}{a^2 + 1} = f(a)$$

för alla reella tal a. Det innebär att grafen till f är symmetrisk kring nollan.

Låt oss studera några värden på x. Av symmetriskäl räcker det att titta på positiva värden. Vi har

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-1	1/2	7/5	17/10	31/17	49/26	71/37

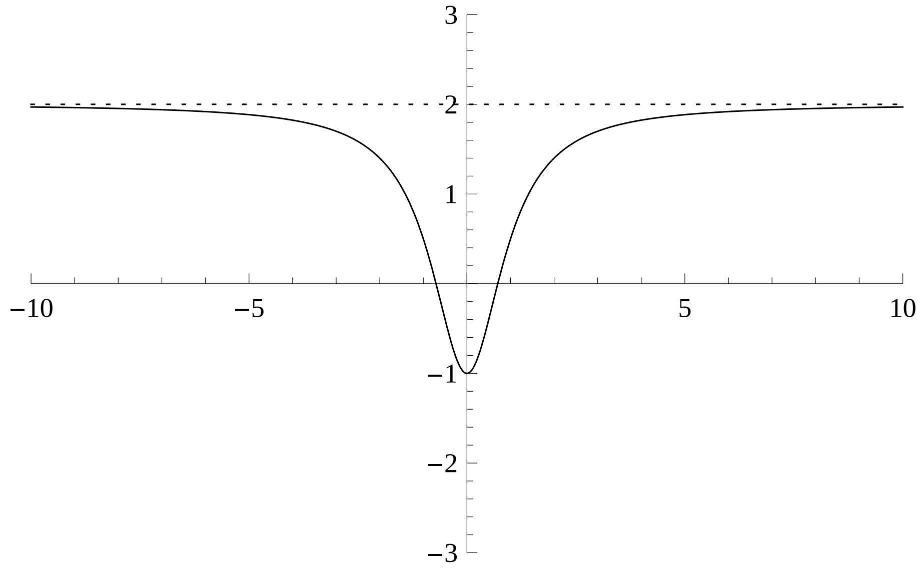
Vi noterar att alla dessa värden är mindre än två. I Figur 48 har vi skissat $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ samt linjen $y = 2$. Det verkar som att $f(x) \to 2$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

Det gäller att gränsvärdet för $f(x)$ när x går mot plus/minus oändligheten verkligen är två, och detta skriver vi som

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2.$$

Låt oss ge ett bevis av detta. Vi börjar med att dela båda täljare och nämnare med x^2, vilket är tillåtet eftersom vi inte är intresserade av funktionens värde i nollan. Vi får

$$\frac{\frac{2x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$



Figur 48: Grafen till $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ i intervallet $[-10, 10]$.

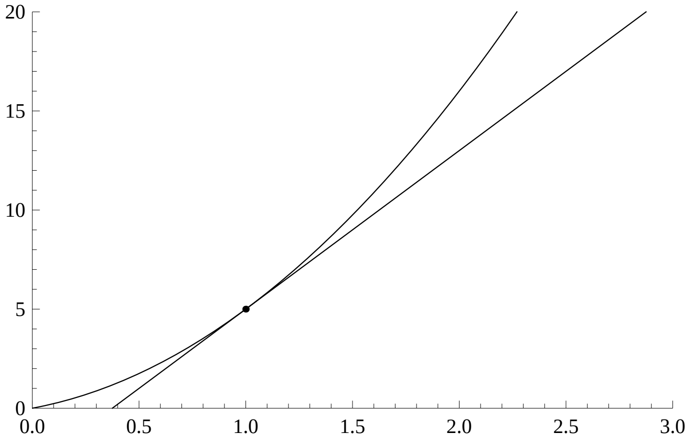
När x är ett stort positivt eller negativt tal så kommer $\frac{1}{x^2}$ att vara nära noll. Man kan visa att om vi låter x gå mot plus eller minus oändligheten kommer $\frac{1}{x^2}$ att gå mot noll. Det gäller alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

3.7 Derivata

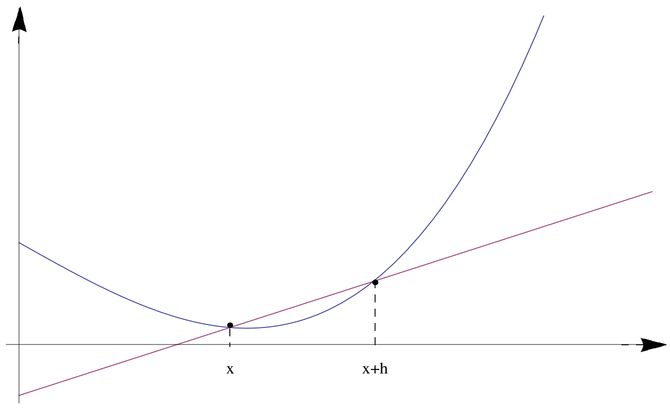
Du känner säkert till att derivatan av en funktion i en punkt anger lutningen av motsvarande funktionsgraf i den punkten. Med andra ord berättar derivatan hur snabbt det förlopp som funktionen beskriver förändrar sig, alltså förändringshastigheten.

Om vi ritar upp grafen till en funktion $s(t)$ så kommer derivatan i en viss punkt, t_0, att vara lutningen på den räta linje som *tangerar* kurvan i $(t_0, s(t_0))$. Vi kallar denna linje för *tangent* till kurvan $s(t)$ i punkten $(t_0, s(t_0))$, vilket illustreras med ett exempel i Figur 49.



Figur 49: En funktion samt dess tangent (den räta linjen) i punkten $(1, 5)$.

Men hur ska man matematiskt bestämma tangentens lutning? Vi gör det genom att först betrakta *sekanten* - det vill säga den linje som går genom två punkter på kurvan och sedan låta avståndet mellan dessa två punkter krympa mot noll. Låt den ena punkten vara $(x, f(x))$ och den andra $(x+h, f(x+h))$, se Figur 50.



Figur 50: Sekant (den räta linjen) genom punkterna $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$.

Som vi har sett tidgare bestäms lutningen på en rät linje mellan punkterna (a, b) och (c, d) av kvoten $\frac{d-b}{c-a}$ så i vårt fall fås alltså

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Den här kvoten ger oss lutningen på sekanten. För att få lutningen på tangenten låter vi parametern h (som kan vara både positiv och negativ) närma sig 0. Derivatans definition ges nu av gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Exempel 3.68. *Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan av x^2 är $2x$.*

Lösningsförslag: Vi har alltså $f(x) = x^2$ och vi ska bestämma $f'(x)$. Enligt derivatans definition är

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Eftersom $f(x) = x^2$ så är

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2hx+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x+h.$$

När h närmar sig noll går $2x+h$ mot $2x$, så

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x+h = 2x,$$

precis vad vi skulle visa. ★

Exempel 3.69. *Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ med hjälp av derivatans definition.*

Lösningsförslag: Enligt derivatans definition är

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - (x^4 + 3x^2 - 1)}{h} \\
= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + 6xh + 3h^2}{h} \\
= \lim_{h \to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 + 6x + 3h \\
= 4x^3 + 6x,
\end{aligned}$$

eftersom termerna $6x^2h, 4xh^2, h^3$ och $3h$ alla går mot noll då h går mot noll.

★

Det finns flera sätt att beteckna derivatan för funktionen $y = f(x)$:

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \text{och } D[f(x)].$$

3.7.1 Tangentens ekvation

Som vi nu har sett är derivatan av en funktion detsamma som tangentens lutning i varje given punkt där funktionen är definierad. Vi ska nu ta reda på tangentens ekvation i en viss punkt. Tangenten är en rät linje och kan därför skrivas på formen

$$y = kx + m$$

där, som vi tidigare noterat, $k-$värdet anger linjens lutning och m-värdet anger skärningspunkten med $y-$axeln. Låt oss se hur det går till att beräkna k-värdet och m-värdet genom att betrakta ett exempel.

Exempel

Låt $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ och bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $f(x)$ i punkten $(1, 3)$.

Lösningsförslag: Vi börjar med att beräkna derivatan för $f(x)$ med hjälp av vad vi lärde oss i föregående avsnitt och får

$$f'(x) = 4x^3 + 6x.$$

Då $x = 1$ fås att $f'(1) = 10$ vilket alltså är lutningen i punkten $(1, 3)$. Nu återstår att bestämma m-värdet. För att en rät linje med lutning 10 ska tangera kurvan $f(x)$ i punkten $(1, 3)$ så krävs att den punkten finns med även på linjen. Således stoppar vi in $x = 1$ och $y = 3$ i tangentens ekvation och får

$$3 = 10 \cdot 1 + m$$

vilket ger att $m = -7$ och tangentens ekvation ges därför av

$$y = 10x - 7.$$

3.7.2 Derivator av kända funktioner

Med hjälp av derivatans definition, som alltså är ett gränsvärde, kan man nu härleda derivatan för olika funktioner. Nedan ges formler för att derivatan av våra vanligaste funktioner; konstanta funktioner, polynom, trigonometriska funktioner, exponentialfunktioner och logaritmfunktioner. Av utrymmesskäl hoppar vi över bevisen.

funktion	derivata
$C(konstant)$	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	nx^{n-1}

Exempel 3.70.

$$D[2] = 0, \quad D[x] = 1, \quad D[x^{10}] = 10x^9, \quad D[x^{3/2}] = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad D[1/x] = D[x^{-1}] = -1{\cdot}x^{-2} = -1/x^2$$

För att bevisa att derivatan av x^n är nx^{n-1} för ett godtyckligt n kan man använda binomialsatsen.

För att visa att derivatan av $\sin x$ är lika med $\cos x$ använder man ett samband som inte ingår i kursen, nämligen $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

3.7.3 Derivatan av summor, produkter, sammansättningar och kvoter av funktioner

Det gäller att derivatan av en summa av funktioner är densamma som summan av funktionernas derivator, vilket är mycket hjälpsamt vid beräkning av derivator. Mer precist så gäller det att

$$D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$$

och

$$D[af(x)] = aD[f(x)] \text{ för } a \in \mathbb{R}.$$

Exempel 3.71.

$$D[\sin x + x^2 + 4x^4] = D[\sin x] + D[x^2] + 4D[x^4] = \cos x + 2x + 16x^3.$$

Produktregeln beskriver hur man deriverar produkten av två funktioner:

$$\boxed{D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Exempel 3.72. *Vad blir derivatan av funktionen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ i punkten $x = \pi$?*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då får vi

$$D(f(x)) = D(g(x)h(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

enligt produktregeln. Alltså är $f'(\pi) = -\pi^2$. ★

Exempel 3.73. *Vad blir derivatan av funktionen $f(x) = e^x \cdot \ln x$?*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = e^x$ och låt $h(x) = \ln x$. Då får vi

$$D(f(x)) = D(g(x)h(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$$

enligt produktregeln. ★

Produktregeln visar man med hjälp av definitionen på derivata och gränsvärdesformler.

Kedjeregeln beskriver hur man deriverar en sammansatt funktion:

$$\boxed{D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}$$

Man kallar $f(x)$ för den *yttre* funktionen och $g(x)$ för den *inre* funktionen. Regeln minns man då lättast genom att tänka "yttre derivatan gånger inre derivatan".

Exempel 3.74. *Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sin x^2$.*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = \sin x$ och låt $h(x) = x^2$. Då är $f(x) = g(h(x))$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D(f(x)) = D(g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos x^2 \cdot 2x.$$

★

Exempel 3.75. *Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = (x^2 + 5)^{10}$ i punkten $x = 0$.*

Lösningsförslag 1: Låt $g(x) = x^{10}$ och låt $h(x) = x^2 + 5$. Då är $f(x) = g(h(x))$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D(f(x)) = D(g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 10(x^2 + 5)^9 \cdot 2x$$

och vi får $f'(0) = 10(0^2 + 5)^9 \cdot 2 \cdot 0 = 0$. ★

Lösningsförslag 2: En annan möjlig lösning är att utveckla $(x^2+5)^{10}$ med binomialsatsen och sedan derivera polynomet termvis. Men det blir givetvis otroligt mycket räkningar. ★

För den intresserade läsaren ska vi nu genomföra beviset av kedjeregeln. Vi kallar $g(x)$ för y, och vi använder Δx för att beteckna en liten skillnad på x. Då gäller det att en liten skillnad på x ger oss en liten skillnad på y, förutsatt att g är *kontinuerlig* . Vi ska inte gå in på detaljer, men man kan säga att en funktion är kontinuerlig om man kan rita grafen till den utan att lyfta på pennan. Alla reella funktioner som vi stött på hittills är kontinuerliga. Vi behöver en till definition innan vi formulerar och bevisar satsen. Vi sätter $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$, vilket innebär att Δy är litet om Δx är litet.

Sats 10. *Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga reella funktioner. Då gäller att*

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x).$$

Bevis. Enligt definitionen av derivata så gäller det att

$$D\left[f(g(x))\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}.$$

Vi förlänger täljare och nämnare med $g(x + \Delta x) - g(x)$ och får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Genom att utnyttja $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$ kan vi skriva om $f(g(x+\Delta x))$ som $f(\Delta y + g(x))$. Detta ger oss

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta y + g(x)) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Här byter vi nu ut $g(x)$ till y, och får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Eftersom $\Delta y \to 0$ då $\Delta x \to 0$, så får vi att ovanstående blir

$$\left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right).$$

Vi känner nu igen delarna som definitioner på derivator och vi har helt enkelt

$$f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Vi är nu klara med beviset. □

Kvotregeln beskriver hur man beräknar derivatan av en kvot och ges av sambandet

$$\boxed{D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.}$$

Exempel 3.76. *Beräkna derivatan av* $f(x) = x^2/\sin x$.

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då är

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$$

★

Man kan härleda kvotregeln från produktregeln och kedjeregeln, men vi utelämnar det beviset.

3.7.4 Är derivatan alltid definierad?

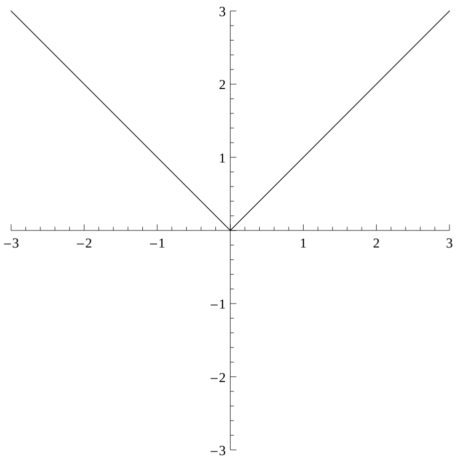
Låt oss studera derivatans definition igen. Det gäller alltså att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vad som är viktigt att förstå är att talet h kan vara både negativt och positivt. Det innebär att $x+h$ både kan vara mindre än eller större än x. För att derivatan ska vara definierad måste alltså $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vara samma tal oavsett om vi ”kommer från höger” (om h är positivt) eller om vi ”kommer från vänster” (om h är negativt). Att det inte spelar någon roll från vilket håll vi kommer gäller för våra vanliga funktionstyper; polynom, rationella funktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och trigonometriska funktioner, men det visar sig att det finns elementära funktioner där derivatan är *odefinierad*.

Ett klassiskt exempel är funktionen $f(x) = |x|$, se Figur 51. Funktionen kan skrivas som

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = x \text{ om } x \geq 0 \\ h(x) = -x \text{ om } x < 0. \end{cases}$$



Figur 51: Funktionen $f(x) = |x|$.

Derivatan av funktionen $g(x)$ är 1 medan derivatan av funktionen $h(x)$ är -1. Detta innebär faktiskt att derivatan inte är definierad i punkten 0. Låt oss se varför. Antag först att h är ett positivt tal. Vi får då

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(h)/h = \lim_{h\to 0} h/h = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Om vi istället antar att h är ett negativt tal så får vi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(h)/h = \lim_{h\to 0} -h/h = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

eftersom $f(h) = -h$ då h är negativt.

Det gäller alltså att funktionen $f(x)$ saknar derivata i punkten 0. Observera att $\lim_{h\to 0} 1 = 1$ och att $\lim_{h\to 0} -1 = -1$ eftersom vänsterleden inte alls beror av h.

3.7.5 Tillämpning av derivata för att bestämma min- och maxpunkter

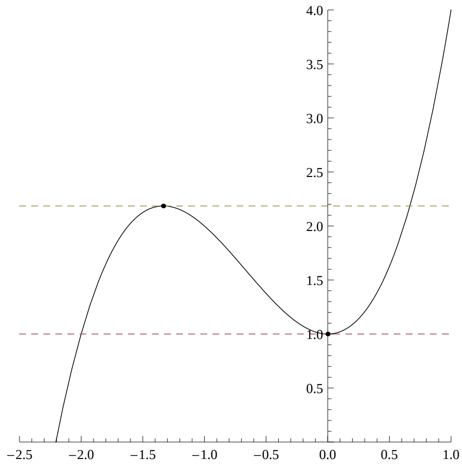
Vi säger att en funktion $f(x)$ har ett lokalt minimum i punkten $(a, f(a))$ om funktionsvärdena precis intill punkten a är större än $f(a)$. På samma sätt har $f(x)$ ett lokalt maximum i punkten $(a, f(a))$ om funktionsvärderna precis intill punkten a är mindre än $f(a)$. Punkter som är lokala maxima eller minima kallas för *extrempunkter*.

Om derivatan till en funktion är definierad så är den noll i punkter där lokalt minimum eller maximum finns. Man kan inse att detta genom att minnas definitionen av derivatan av en funktion i en punkt som lutningen på tangenten på funktionens graf i samma punkt. Att ha lutning noll är detsamma som att vara parallell med x-axeln, se Figur 52, vilket ju är fallet i en extrempunkt. Alltså måste derivatan vara lika med noll i den punkten. Vi har alltså följande sats.

Sats 11. *Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion vars derivata är definierad överallt. Om $(a, f(a))$ är en lokal extrempunkt så är $f'(a) = 0$.*

Exempel 3.77. *Funktionen $f(x) = 16 - x^2$ har ett maximum för $x = 0$ och mycket riktigt så är $f'(0) = 0$.*

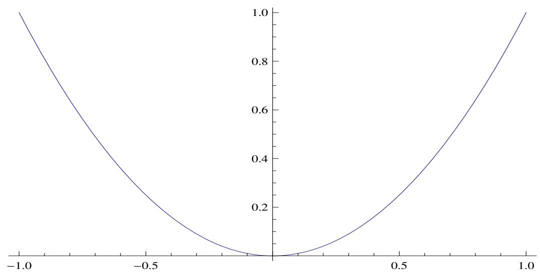
Vi har nu sett hur man kan använda derivatan för att bestämma lokala extrempunkter. För att kunna bestämma karaktären på extrempunkterna kan vi använda oss av andraderivatan, $f''(x)$, definierad som derivatan av $f'(x)$. Du kanske minns sedan gymnasiet att en negativ andraderivata innebär att extrempunkten du hittat är ett lokalt maximum och på motsvarande sätt att en positiv



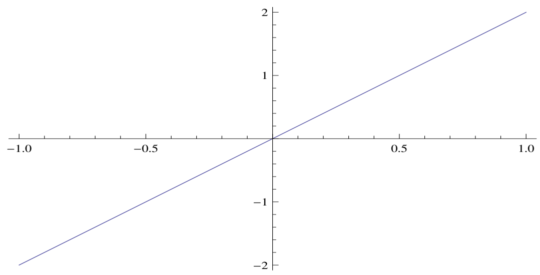
Figur 52: Grafen till funktionen $f(x) = x^3+2x^2+1$. Derivatan $f'(x)$ är lika med $3x^2+4x = (3x+4)\cdot x$ och har nollställen i $x = 0$ och i $x = -4/3$. I punkten $x = 0$ har funktionen en lokal minimipunkt och i punkten $x = -4/3$ antar f ett lokalt maxima. Tangenterna i dessa punkter är utritade med streckade linjer.

andraderivata innebär ett lokalt minimum. Genom några exempel och tolkningen av derivata som grafens lutning inser vi varför det förhåller sig så.

Låt oss först betrakta andragradspolynomet $f(x) = x^2$ som harnollställe i punkten $x = 0$. Grafen till $f(x)$ är som du redan känner till en parabel med minimum i $x = 0$. Funktionsgraferna till $f(x), f'(x)$ och $f''(x)$ återfinns i figurerna 53, 54 och 55.

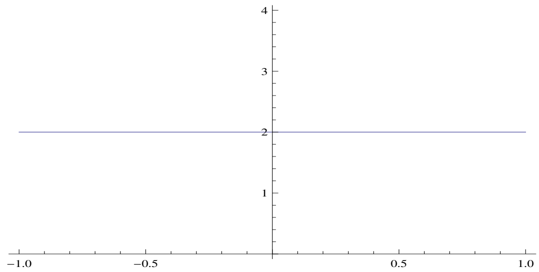


Figur 53: Grafen till $y = x^2$.



Figur 54: Grafen till $y = 2x$.

Vi ser hur derivatan, vars kurva är en rät linje, antar värden som motsvaras av lutningen på kurvan till $f(x)$. Derivatan $f'(x)$ är negativ fram till $x = 0$ där $f'(x) = 0$ och därefter är



Figur 55: Grafen till $y = 2$.

den positiv. Själva kurvan till derivatan har alltså alltid positiv lutning lika med två, och därför är andraderivatan konstant och positiv, $f''(x) = 2$. Det här är förstås inte unikt för $f(x) = x^2$ utan samma omständigheter råder i en omgivning för varje lokalt minimum för alla funktioner som har andraderivata. Om det istället rör sig om ett lokalt maximum så är funktionskurvans lutning positiv en bit ifrån och fram till extrempunkten och negativ en bit därefter. Det innebär att derivatan alltid kommer ha negativ lutning i denna omgivning och gå från positiva värden till negativa - dvs andraderivatan är negativ i extrempunkten samt i en omgivning till denna.

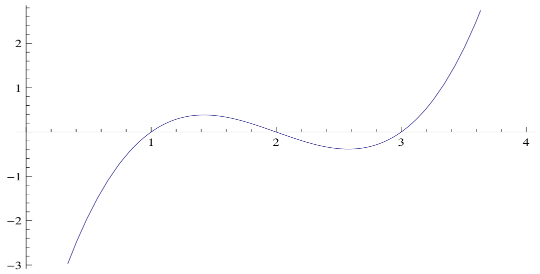
Vi går vidare till ett tredjegradspolynom. Låt oss konstruera ett polynom med nollställen i $x = 1, x = 2$ och $x = 3$, det gör vi genom att definiera

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

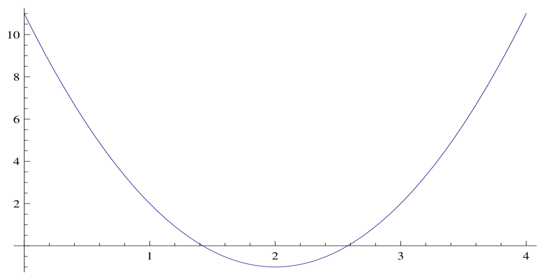
Derivering ger nu

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \text{ och } g''(x) = 6x - 12.$$

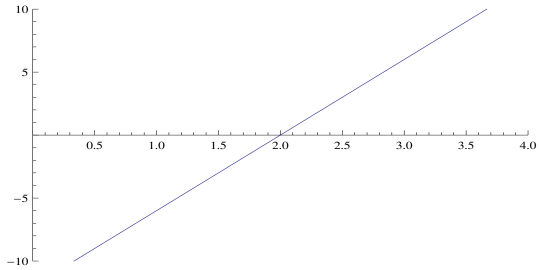
Funktionsgraderna till $g(x), g'(x)$ och $g''(x)$ återfinns i Figurerna 56, 57 och 58.



Figur 56: Grafen till funktionen $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.



Figur 57: Grafen till funktionen $g'(x) = 3x^2 - 12x + 11$..



Figur 58: Grafen till funktionen $g''(x) = 6x - 12$.

På grund av hur vi konstruerade vår funktion så kommer $g(x)$ att skära x-axeln i punkterna $x = 1, x = 2$ och $x = 3$ vilket vi ser i graferna ovan. Vi ser att det lokala maximumet i intervallet $1 < x < 2$ motsvarar negativa värden på andraderivatan. I punkten $x = 2$ är $g''(x) = 0$ och därefter är andraderivatan positiv vilket alltså hänger ihop med det lokala minimumet i intervallet $2 < x < 3$. I den punkt där andraderivatan växlar tecken, dvs då $x = 2$, har $g(x)$ en så kallad *inflexionspunkt*. Vi säger även att $f(x)$ är *konkav* då $f''(x) < 0$ och *konvex* då $f''(x) > 0$. Således kan man säga att att en inflexionspunkt är punkten då en kurva går från att vara konvex till konkav (eller tvärtom). Vi har alltså med hjälp av ovanstående exempel insett följande.

Sats 12. *Låt a vara en extrempunkt till en funktion $f(x)$. Om $f''(a) < 0$ så är $(a, f(a))$ ett lokalt maximum och om $f''(a) > 0$ så är $(a, f(a))$ ett lokalt minimum.*

Exempel 3.78. *Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.*

Lösningsförslag: Eftersom $f(x)$ är ett polynom så är derivatan definierad överallt. Vi beräknar att $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, så lösningarna till $f'(x) = 0$ är $x = 2$ och $x = -1$. Detta blir våra potentiella extrempunkter, eftersom $f(x)$ inte har några punkter där derivatan saknas.

Vi beräknar sedan $f''(x) = 12x - 6$ och vi får att $f''(-1) = -18 < 0$, så $x = -1$ är en lokal maximipunkt. Vidare så är $f''(2) = 18 > 0$ och $x = 2$ är då ett lokalt minimum.

Sammanfattningsvis har vi då att $x = -1$ är ett lokalt maximum, och $x = 2$ är ett lokalt minimum. Funktionsvärdena i dessa punkter är $f(-1) = 12$ resp. $f(2) = -15$. ★

3.7.6 Tillämpning av derivata vid grafritning

Vi ska nu använda teori som vi gått igenom för derivator för att skissera grafen till en funktion $f(x)$.

Betrakta

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

och dess derivata som ges av

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Nollställena till derivatan är som synes $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$. Andraderivatan ges av

$$f''(x) = 6x$$

och om vi stoppar in punkterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$ så fås att $f''(1) > 0$ samt $f''(-1) < 0$ så $x_1 = 1$ är ett lokalt minimum och $x_2 = -1$ är ett lokalt maximum. Vi har en inflexionspunkt i $x = 0$.

Låt oss göra ett fullständigt studium av grafen till $f(x) = x^3 - 3x + 2$. För att göra det behöver vi veta var f har sina nollställen. Genom att söka efter rationella rötter finner vi att $x = 1$ är en rot. Genom polynomdivision får vi $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$.

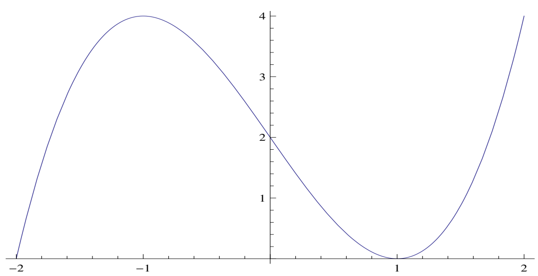
Med hjälp av kvadratkomplettering finner vi att rötterna till $x^2 + x - 2 = 0$ är lika med $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$. För att kunna skissera grafen behöver vi kunna säga något om hur $f(x)$ beter sig när x blir stort. Den dominerande termen i $f(x)$ är x^3 och den växer snabbt mot oändligheten då x går mot oändligheten. Motsvarande gäller för negativa värden på x, dvs då $x \to -\infty$ så kommer $f(x) \to -\infty$.

Låt oss skriva ned allt vi vet om $f(x)$ i ett teckenschema på samma sätt som vi gjort i tidigare avsnitt. Vi anger inget exakt värde för $f'(x)$ och $f''(x)$, det räcker med att ange om värdet är positivt eller negativt, går mot oändligheten eller är lika med noll. Vi skriver det som $+, -, \infty, -\infty$ eller 0.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	∞
$f(x)$	$-\infty$	0	4	2	0	∞
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	0	∞
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	0	$+$	∞

Vi ser nu i teckentabellen att andraderivatan är negativ på intervallet $-\infty < x < 0$ och således är $f(x)$ konkav på intervallet $-\infty < x < 0$ och extrempunkten i $x = -1$ är ett maximum. I intervallet $0 < x < \infty$ är andraderivatan positiv och $f(x)$ är alltså konvex. Det betyder att extrempunkten i $x = 1$ är ett minimum. I $x = 0$ har $f(x)$ en inflextionspunkt.

I Figur 59 skisserar vi nu grafen genom att använda all information som vi samlat i tabellen.



Figur 59: Skiss av grafen $y = x^3 - 3x + 2$.

Exempel 3.79. *Låt $h(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $h(x) = 0$ samt lokala extrempunkter och deras karaktär. Ange vilka intervall som $h(x)$ är konkav respektive konvex på och bestäm samtliga inflextionspunkter. Skissera slutligen grafen till kurvan $y = h(x)$.*

Lösningsförslag:

Lösningar till ekvationen fås genom att se att $x = 1$ är en rot så vi dividerar bort faktorn $(x - 1)$. Sedan löser vi den kvarvarande andragradsekvationen $x^2 + 4x - 20 = 0$ och får att de tre nollställen är $x_1 = 1$, $x_2 = -2 + 2\sqrt{6}$ och $x_3 = -2 - 2\sqrt{6}$. Derivatan ges av

$$h'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x - 2)(x + 4)$$

och denna har nollställena $x_1' = 2$ och $x_2' = -4$. Andraderivatan ges av

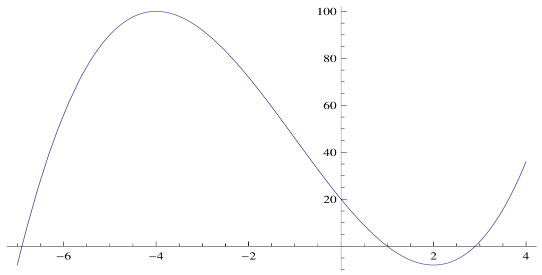
$$h''(x) = 6x + 6,$$

vilket är positiv då $x > -1$ och negativ då $x < -1$. Funktionen är alltså konvex då $x > -1$ och konkav då $x < -1$. I punkten $x = -1$ har $h(x)$ en inflektionspunkt.

När x går mot $\pm\infty$ gör $h(x)$ det också. Vi sammanställer allt vi vet i en tabell:

x	$-\infty$	$-2-2\sqrt{6}$	-4	-1	1	2	$-2+2\sqrt{6}$	∞
$h(x)$	$-\infty$	0	100	46	0	-8	0	∞
$h'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	∞
$h''(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	∞

Vi kan nu skissa grafen till kurvan $y = h(x)$, se Figur 60.



Figur 60: Grafen till kurvan $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.

★

Sammanfattningsvis behöver vi alltså ta reda på följande för att kunna skissera en funktionsgraf där derivatan är definierad överallt:

1. Vilka är funktionens nollställen?
2. Vilka är funktionens extrempunkter (derivatans nollställen)?
3. Vilken karaktär har extrempunkterna - lokala maxima eller minima? (avgörs av andraderivatans tecken i punkterna)
4. Hur beter sig funktionen för stora ingångsvärden?

3.7.7 Maximum och minimum av en funktion på ett intervall

Vi ska nu avsluta med att gå igenom hur man kan bestämma största och minsta värde av en funktion på ett intervall och vi tillåter nu även att derivatan inte nödvändigtvis är definierad överallt.

Om man vill finna maximum (minimum) av en funktion $f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så kan man göra på följande sätt.

1. Derivera $f(x)$ och bestäm alla punkter inom $[a, b]$ där $f'(x) = 0$. Beräkna funktionsvärdet i dessa.
2. Beräkna funktionens värde i eventuella punkter där derivatan inte är definierad.
3. Beräkna funktionens värde i ändpunkterna.
4. Funktionens maximum (minimum) är det största (minsta) värdet av alla funktionsvärden du beräknat.

Exempel 3.80. *Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ *på intervallet* $[-3, 1]$.

Lösningsförslag: Från exempel 3.78 vet vi att derivatan till $f(x)$ är noll i $x = 2$ och $x = -1$ och att $f(2) = -15$ samt $f(-1) = 12$. Det första värdet ingår dock inte i vårt intervall. Låt oss ta reda på funktionsvärderna i ändpunkterna. Vi får $f(-3) = -40$ och $f(1) = 2 - 3 - 12 + 5 = -8$. Det följer att funktionens maximala värde är $f(-1) = 12$ och att dess minimala värde är $f(-3) = -40$. ★

Låt oss nu titta på ett litet svårare exempel.

Exempel 3.81. *Finn största och minsta värde som funktionen* $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ *antar på intervallet* $[-2, 1/4]$.

Lösningsförslag: Eftersom vi har ett absolutbelopp med så är derivatan inte definierad i $x = 0$. Låt oss dela upp funktionen i två delar, där båda delarna är polynom.

Funktionen kan skrivas som

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = -x^2 + x + 2 \text{ om } x \geq 0 \\ h(x) = -x^2 - x + 2 \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

Derivatan av $g(x)$ är $-2x + 1$. Om vi sätter detta uttryck till noll får vi $x = 1/2$. Denna punkt ligger dock inte i det intervall där $f(x)$ är definierad.

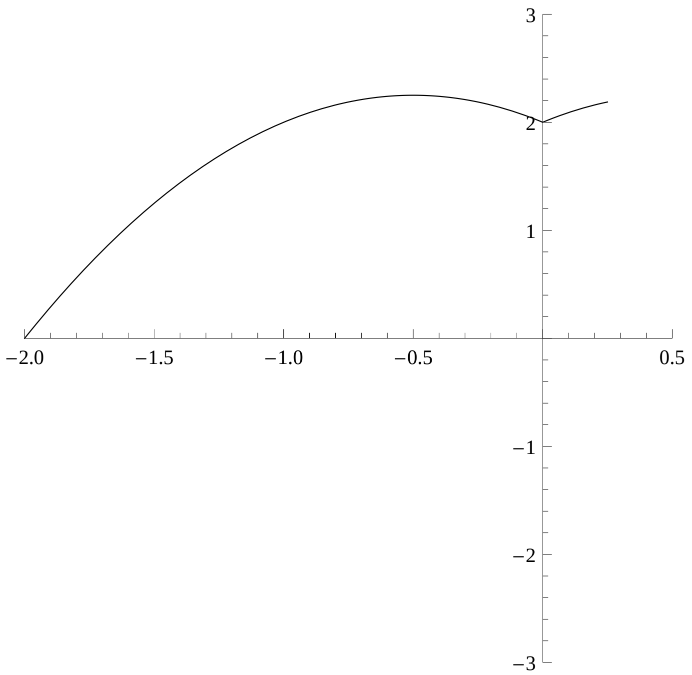
För funktionen $h(x)$ har vi $h'(x) = -2x - 1$ och vi får $x = -1/2$ som lösning till $h'(x) = 0$.

Vi har alltså fyra punkter som kandidater till min- och maxpunkter; punkten där derivatan är odefinierad ($x = 0$), punkten där derivatan är noll ($x = -1/2$) samt intervallets ändpunkter ($x = -2$ och $x = 1/4$).

Vi får

$$f(0) = 2, \quad f(-1/2) = 9/4, \quad f(-2) = 0 \quad \text{och} \quad f(1/4) = 35/16.$$

Eftersom $9/4 = 36/16$ så är $f(-1/2) > f(1/4)$. Alltså är funktionens största värde $9/4$ och funktionens minsta värde är 0. Funktionen illustreras i Figur 61. ★



Figur 61: Funktionen $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ på intervallet $[-2, 1/4]$.

Övningar

1. Bestäm derivatan av $x^5 + x^4 + 3x^2 - 2 + x^{-1}$

2. Bestäm derivatan av $\sin 2x + \cos 2x$.

3. Bestäm derivatan av $\sin^2 x + \cos^2 x$. Förklara resultatet.

4. Bestäm $f'(0)$ då

   (a) $f(x) = x^2 + 2x \cos x$

   (b) $f(x) = e^{\sin x}$

   (c) $f(x) = (2x + 4)^{10}$

5. Finn minsta och största värde som följande funktioner antar i intervallet $[-10, 10]$:

   (a) $10 - 2x - x^2$

   (b) $|x - 2| + x^2 - 4x$

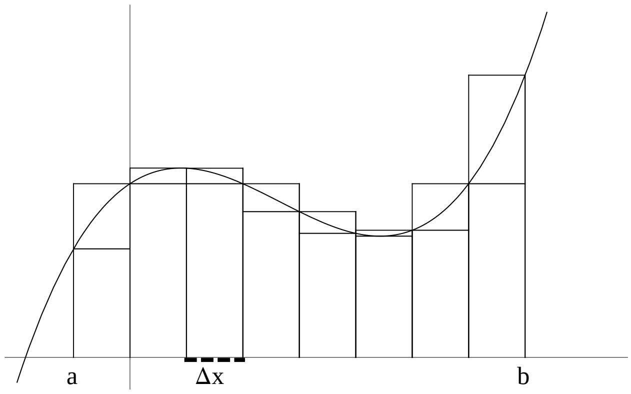
6. Bestäm tangentens ekvation till kurvan $f(x) = 2x^3 - x + 1$ i punkten $(2, 15)$.

7. Bestäm lokala extrempunkter till $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$ och avgör med hjälp av andraderivatan vilka som är lokala maxima respektive minima.

8. Bestäm x-koordinaten till de lokala extrempunkterna hos $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

3.8 Integraler

För att uppskatta en area A i planet som begränsas av en positiv graf och ett intervall $[a, b]$ på x-axeln kan vi ta hjälp av inskrivna och omskrivna rektanglar. Dessa rektanglar brukar kallas för övre och undre rektanglar, se Figur 62.



Figur 62: Övre och undre rektanglar till funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 7$.

Låt f vara en funktion som är begränsad i intervallet $[a, b]$. Detta betyder att $f(x) < \infty$ för alla $x \in [a, b]$. Till exempel är alla polynom begränsade i $[a, b]$ oavsett värde på a och b.

Låt oss nu dela upp intervallet $[a, b]$ i n stycken delar. Indelningen kan till exempel skrivas $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, så att x_i är den högra ändpunkten i det i:te intervallet från vänster räknat. Vi får då att det $i$te intervallet ges av $[x_{i-1}, x_i]$ och har längden $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

Exempel 3.82. *Om vi delar upp intervallet* $[1, 2]$ *i fem lika stora delar får vi*

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.2 \quad x_2 = 1.4, \quad x_3 = 1.6, \quad x_4 = 1.8 \quad \textit{och} \quad x_5 = 2.$$

Beteckna det största funktionsvärdet i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med M_i och det minsta funktionsvärdet i samma intervall med m_i. Då kommer den övre rektangeln i det i:te intervallet att ha arean $M_i \cdot \Delta x_i$ och den undre rektangeln i samma intervall att ha arean $m_i \cdot \Delta x_i$.

Vi erhåller den så kallade *översumman* och *undersumman* som

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ respektive } s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Exempel 3.83. *Låt $f(x) = x^2$. Beräkna undersumman respektive översumman på intervallet $[1, 2]$ då $n = 2$.*

Lösningsförslag: Vi noterar först att $f(x)$ är växande på intervallet $[1, 2]$. Eftersom $n = 2$ ska vi dela upp intervallet i två delar, nämligen $[1, 3/2]$ och $[3/2, 2]$. Det största värdet på funktionen i intervallet $[1, 3/2]$ är $f(3/2) = 9/4$, alltså är $M_1 = 9/4$. Det minsta värdet i samma intervall är $f(1) = 1$, alltså är $m_1 = 1$. Det största värdet på f i intervallet $[3/2, 2]$ är $f(2) = 4$, så $M_2 = 4$ och det minsta värdet är $f(3/2) = 9/4$, så $m_2 = 9/4$. Bägge två intervallen har längden $1/2$, så

$$S_2 = M_1 \cdot \frac{1}{2} + M_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9/4 + 4}{2} = \frac{25}{8}$$

och

$$s_2 = m_1 \cdot \frac{1}{2} + m_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + 9/4}{2} = \frac{13}{8}.$$

★

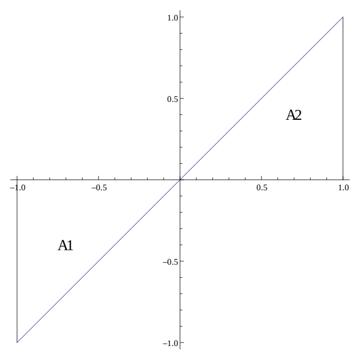
Den sökta arean under funktionskurvan ligger givetvis mellan dessa två areor. Areorna s_n och S_n närmar sig varandra då indelningen blir finare och finare, alltså då antalet delintervall går mot oändligheten. Vi säger att f är **integrerbar** om s_n och S_n går mot samma tal då $n \to \infty$, och detta tal kallas för **integralen av** f.

Integralen av $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ betecknas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I inledningen av detta kapitel antog vi att grafen till funktionen låg ovanför x-axeln, men intergraldefinitionen som arean mellan grafen och x-axeln gäller ändå, om vi tillåter *negativa* areor.

Exempel 3.84. *Integralen av $f(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$ är noll eftersom den är summan av den negativa arean mellan -1 och 0 och den positiva arean mellan 0 och 1, se Figur 63.*



Figur 63: Integralen av $f(x) = x$ mellan -1 och 1 är noll eftersom areorna $A1$ och $A2$ är lika stora $(1 \cdot 1/2 = 1/2)$ men har ombytta tecken.

De flesta funktioner du hittills har stött på är integrerbara. I allmänhet gäller att alla kontinuerliga funktioner är integrerbara.

Anmärkning 1. *Observera logiken i påståendet "Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara". Det innebär att kontinuerlig är ett* tillräckligt villkor *för att en funktion $f(x)$ ska vara integrerbar, men inte något nödvändigt sådant! Det finns funktioner som inte är kontinuerliga men som ändå är integrerbara.*

3.8.1 Beräkning av integraler

Vi börjar med en definition.

Definition 6. *Om f och F är två funktioner sådana att $F'(x) = f(x)$ för alla x i ett intervall I så kallas F för en* primitiv funktion *till f i intervallet I.*

Exempel 3.85. *Låt $f(x) = x^2$. Då är $x^3/3$ en primitiv funktion till f eftersom $F'(x) = 3 \cdot x^2/3 = x^2$. Även $x^3/3 + 1$ är en primitiv funktion till f eftersom ettan försvinner vid derivering.*

Som exemplet antyder så finns det oändligt många primitiva funktioner till en funktion f definierad på ett icke-tomt intervall I. Mer precist — om $F(x)$ är en primitiv funktion så är även $F(x) + C$ en primitiv funktion, där C är en godtycklig konstant.

Vid beräkning av integraler använder vi oss av *integralkalkylens huvudsats*, vars bevis gås igenom i den inledande analyskursen på högskolan.

Sats 13. *Om f är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$ och om F är en godtycklig primitiv funktion till f i $[a, b]$ så gäller det att*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Observera att detta resultat blir detsamma vilken primitiv funktion man än väljer eftersom eventuella konstanttermer försvinner vid subtraktionen. Låt till exempel $F + C$ vara en annan primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Exempel 3.86. *Låt oss verifera att integralen av $f(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$ från Exempel 3.84 verkligen blir noll. $F(x) = x^2/2$ är en primitiv till $f(x) = x$ och alltså gäller det att*

$$\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 1^2/2 - (-1)^2/2 = 1/2 - 1/2 = 0.$$

Funktionsuttrycket $f(x)$ som står under integraltecknet kallas för *integrand*. Ibland skriver man $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ utan integrationsgränser. Man menar då en godtycklig primitiv funktion till $f(x)$.

3.8.2 Några integrationsregler

Låt D beteckna derivatan. Då kan vi från derivationsreglerna

$$D(f + g) = Df + Dg \text{ och } D(kf) = kDf$$

härleda följande regler för integraler:

$$\int (f + g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x \;\text{ och }\; \int kf\,\mathrm{d}x = k\int f\,\mathrm{d}x \tag{3.8.1}$$

där k är en konstant. Man kan alltså integrera termvis och flytta ut konstanter för att göra det lite enklare för sig. Nedan ges primitiva funktioner till några vanligt förekommande funktioner. Observera att man till var och en av de primitiva funktionerna kan addera en konstant.

funktion	primitiv
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$

För att underlätta beräkningar av integraler har man infört en mellanstegsnotation; man skriver

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

där $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$.

Exempel 3.87. *Beräkna*

$$\int x^2\,\mathrm{d}x \text{ och } \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag: Uttrycket $\frac{x^3}{3} + C$ är en primitv till x^2. Alltså är

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

För att lösa den andra delen av uppgiften använder vi mellanstegsnotation ovan.

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

★

Man kan enkelt testa om man funnit rätt primitiv funktion genom att derivera den — då ska man få tillbaka sin ursprungliga funktion.

Exempel 3.88. *Bestäm*

$$\int x^3 + 3x^2 + 1\,\mathrm{d}x$$

och kontrollera beräkningen.

Lösningsförslag: Vi använder räkneregeln i 3.8.1 och får

$$\int x^3 + 3x^2 + 1\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = x^4/4 + x^3 + x + C.$$

Vi testar att vi verkligen har fått fram en primitiv genom att derivera resultatet. Vi får

$$D[x^4/4 + x^3 + x + C] = x^3 + 3x^2 + 1,$$

vilket är precis vad vi ville ha.

★

Exempel 3.89. *Beräkna*

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x\,\mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag:

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \,\mathrm{d}x = 3\left[e^x\right]_{\ln 1}^{\ln 2} = 3(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}).$$

Eftersom e^x och $\ln x$ är inverser till varandra har vi $e^{\ln 2} = 2$ och $e^{\ln 1} = 1$. Vi får alltså

$$3(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}) = 3(2-1) = 3.$$

★

Exempel 3.90. *Beräkna*

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag:

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x = [-2\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = -2\cos(\pi/2)+\sin(\pi/2)+2\cdot\cos 0-\sin 0 = 0+1+2+0 = 3.$$

★

Exempel 3.91. *Beräkna en primitiv till* $\sin x + \cos 2$.

Lösningsförslag: Termen $\cos 2$ är en konstant och en primitiv blir därför $-\cos x + x\cos 2$. ★

Integraler är alltså en slags antiderivator, men de är normalt mycket svårare att beräkna. Det finns exempel på integraler som inte har primitiver som kan uttryckas med elementära funktioner. Ett vanligt exempel är e^{-x^2}.

Kuriosa 10. *Att hitta en primitiv till* e^{-x^2} *är alltså omöjligt om vi begränsar oss till de elementära funktionerna. Men det visar sig att för integrationsgränserna* $-\infty$ *och* ∞ *(definitionen av integrationsgränserna* $-\infty$ *och* ∞ *ryms normalt inom grundkurser i matematik på högskolan) är integralen möjlig att bestämma! Det gäller faktiskt att* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. *Resultaten kommer som en naturlig följdsats från en sats i matematisk statistik.*

Om vi ska hitta en primitiv till e^{2x} så duger inte e^{2x} eftersom $D[e^{2x}] = 2e^{2x}$. Vi måste kompensera för tvåan och provar $e^{2x}/2$. Derivatan av denna funktion är e^{2x}, och alltså är $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^{2x}/2+C$.

På samma sätt har vi

$$\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos 5x}{5} + C.$$

och

$$\int 6e^{2x}\,\mathrm{d}x = 3e^{2x} + C.$$

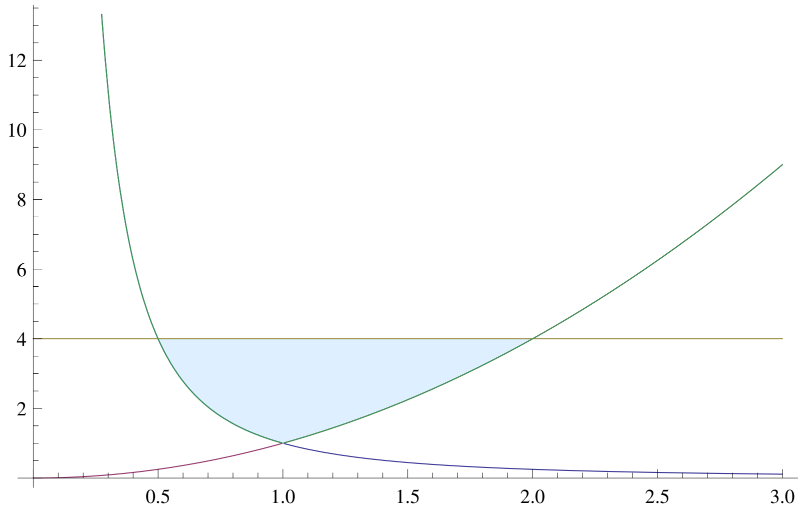
I enklare fall som ovan går det bra att använda magkänslan och prova sig fram. Eftersom man kan derivera sitt svar går det enkelt att kontrollera att man tänkt rätt. Men om funktionen är mer komplicerad måste man vara lite mer systematisk. Hur man då går tillväga visas på inledande analyskurser på högskolan.

3.8.3 Att bestämma areor med hjälp av integraler

Vi inledde studiet av integraler genom en areaberäkning och ska nu visa hur man kan lösa en till synes komplicerad areaberäkning med just integralkalkyl.

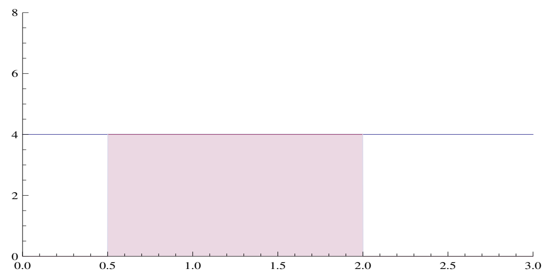
Exempel 3.92. *Bestäm arean A av området i första kvadranten som ligger mellan kurvorna $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}$ och linjen $y = 4$.*

Lösningsförslag: Om man skisserar graferna är det lättare att se hur vi ska integrera. Repetera slutet på föregående avsnitt om du behöver påminna dig om hur man skisserar kurvor.



Figur 64: Området som vi söker arean av.

Vi börjar med att ta reda på skärningspunkten mellan kurvan $y = \frac{1}{x^2}$ och $y = 4$ samt den mellan $y = x^2$ och $y = 4$. Dessa är $(1/2, 4)$ respektive $(2, 4)$. Därför beräknar vi arean R av rektangeln med gränserna $1/2 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 4$, vilken är lika med 6 areaenheter, se Figur 65.

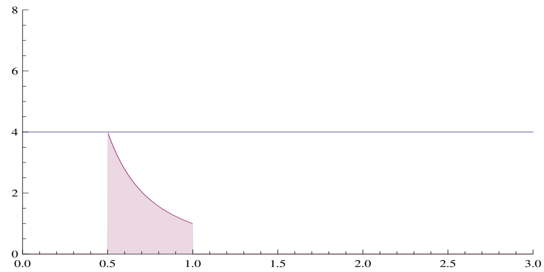


Figur 65: Området som ligger mellan linjen $y = 4$, x-axeln samt linjerna $x = 1/2$ och $x = 2$.

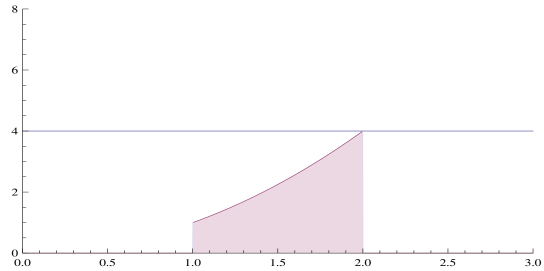
Vi ska nu beräkna arean av området som ligger mellan kurvan $y = \frac{1}{x^2}$ och x-axeln samt de räta linjerna $x = 1/2$ och $x = 1$, se Figur 66 på intervaller $[\frac{1}{2}, 1]$.

Skärningspunkten mellan $y = \frac{1}{x^2}$ och $y = x^2$ är $(1, 1)$. Alltså ska vi nu integrera $\frac{1}{x^2}$ i intervallet $[1/2, 1]$. Vi får då

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = (-1) - (-2) = 1.$$



Figur 66: Området som ligger mellan kurvan $y = \frac{1}{x^2}$ och x-axeln samt de räta linjerna $x = 1/2$ och $x = 1$ och vars area är lika med $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}\ dx$ areaenheter.



Figur 67: Området som ligger mellan kurvan $y = x^2$ och x-axeln samt de räta linjerna $x = 1$ och $x = 2$ och vars area är lika med $\int_{1}^{2} x^2\ dx$ areaenheter.

Slutligen beräknar vi arean av området som ligger mellan kurvan $y = x^2$ och x-axeln samt de räta linjerna $x = 1$ och $x = 2$ på intervaller $[1, 2]$, se Figur 67.

Denna ges av

$$I_2 = \int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Sammantaget kan vi nu alltså beräkna A genom

$$A = R - I_1 - I_2 = 6 - 1 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}.$$

★

Övningar

1. Bestäm alla primitiva funktioner till
   (a) $x + x^2$
   (b) $1/x + 1/x^2$
   (c) e^{3x}
   (d) $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$
   (e) e^{ax+b}
2. Beräkna integralerna
   (a) $\int_0^1 x^2 + 3\,\mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^{-2} e^x - e\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^2 x^{3/2} \cdot x \, \mathrm{d}x$

3. Beräkna arean som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x$.

4 Facit till övningarna

Kapitel 1

Avsnitt 1.2

1. $1-(5-4)=0$
2. $(-1)^3=-1$
3. $(-1)^{12}=1$
4. $-(a-b-(a+b))+(a+b)=a+3b$
5. $(a+b)(c+d)-c(a+b)=(a+b)d$
6. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
7. $(2^2)^2=2^{2^2}, (2^3)^2=8^2=64\neq 2^{3^2}=2^9=512$
8. $k=15$, $r=2$, det vill säga $107=15\cdot 7+2$.
9. $293-10\cdot 17=123$, $123-7\cdot 17=4$. Resten är alltså 4.
10. -
11. -

Avsnitt 1.3

1. 4
2. 2
3. $40\,(=4\cdot 2\cdot 5)$
4. 661 är ett primtal, medan $133=19\cdot 7$ och $85=5\cdot 17$. Det följer att 133 har de positiva delarna $1,7,19$ och 133 och att 85 har de positiva delarna $1,5,17$ och 85, d.v.s. fyra var.
5. -

Avsnitt 1.4

1. 0
2. 1
3. Måndag
4. 2
5. 7
6. 5
7. Om $s_n, s_{n-1},\ldots,s_1,s_0$ är sifforna i talet t kan vi skriva det som $s_n\cdot 10^n+s_{n-1}10^{n-1}+\cdots s_1\cdot 10+s_0$. Eftersom $10\equiv_3 1$ så är $10^n\equiv_3 1^n=1$ och alltså lämnar talet t och dess siffersumma samma rest vid division med tre.

Avsnitt 1.5

1. 100010_2

2. 13

Avsnitt 1.6

1. 41/42
2. $-20/3$
3. 5/2
4. Ja, de är lika.
5. (a) $\frac{41}{27}$
   (b) -9
   (c) $-\frac{1}{30}$
   (d) $\frac{29}{144}$

Avsnitt 1.7

1. 64
2. 2
3. 8
4. 28/3
5. 27
6. $2 \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
7. $2^{-53/24}$

Avsnitt 1.8

1. $5 + 3i$
2. $4i + 4$
3. (a) $3 - \frac{2i}{3}$
   (b) $-1 - \frac{4i}{3}$
   (c) $\frac{7}{3} - \frac{5i}{3}$
4. -1
5. 1
6. $\mathrm{Re}(z) = -2, \mathrm{Im}(z) = 2.$

Avsnitt 1.9

1. 999996
2. (a) x
   (b) $\frac{x-y}{x+y}$
   (c) $-5 - x$
3. 25

4. $\frac{3}{2} + \frac{5i}{2}$

Kapitel 2
Avsnitt 2.1

1. (a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (b) $x = 1, x = -\frac{5}{3}$
   (c) $x = 3, x = -4$

2. $a = 8/7, b = 2/7$.

3. $x = -1/2, y = 11/2$.

4. $a = 17/4$ och $b = 3/4$.

Avsnitt 2.2

1. (a) Kvot: $x + 2$, rest: 3.
   (b) Kvot: $3x + 2$, rest: $-14x + 1$.
   (c) Kvot: $3x^2 + 11x + 31$, rest: $105x + 38$.
   (d) Kvot: $x + 1$, rest: 0.
   (e) Kvot: $x - 5$, rest: $17x^2 + 17x + 17$.
   (f) Kvot: 0, rest:x^5.

2. Sant eftersom $p(2) = 0$.

3. $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, rötterna är således $-1, \sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$.

4. Saknar heltalslösningar.

5. $k = -4$ med kvoten $x^2 - 2x + 8$ eller $k = 2$ med kvoten $x^2 - 2x + 2$.

6. $x = \frac{1}{2}$

7. $1, 2, 3, 4, 5$

Avsnitt 2.3

1. 7!=5040

2. $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$

3. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

4. $\binom{9}{3} = 84$

5. (a) 35
   (b) 66

6. Koefficienten framför x^9 är noll och koefficienten framför x^{10} är $\binom{30}{4}$.

7. Summan blir 1, 2, 4, 8, 16, 32,... Sambandet är att summan n i rad i är 2^{i-1}.

8. Ledning: Välj $x = y = 1$ i binomialsatsen.

Avsnitt 2.4

1. $x = 9/4$.

2. Finns inga lösningar.

3. $x = 2$ och $x = 6$.

4. (a) Ja, alla tal större än 1 är också större än 0.
   (b) Nej, x kan vara ett tal som är större än 0, men mindre än 1, t.ex 1/2.
   (c) Ja, produkten av två tal som är positiva eller noll garanterar att produkten av dem också är positivt eller 0.
   (d) Ja.

Kapitel 3
Avsnitt 3.1

1. (a) $\{1, 2, 4, 5, 6, 10, 100, 101\}$
   (b) $\{2, 6, 10\}$
   (c) $\{1, 4, 100\}$

2. Ja. Varje rationellt tal kan skrivas på formen a/b, där a och b är heltal och där b är nollskilt.

Avsnitt 3.2

1. Värdemängden är $\{a, b\}$ och funktionen är inte injektiv eftersom det finns två element som avbildas på a.

2. Funktionen f är både injektiv och surjektiv, eftersom varje element i $\mathbb{Z}$ ”träffas” precis en gång.

3. $g(a) = a^2$. Funktionen g är inte injektiv, t.ex. är $g(-1) = g(1)$. Funktionen är inte heller surjektiv, t.ex. finns inget a så att $g(a) = -1$.

Avsnitt 3.3

1. (a) Sätt $f(x) = 1 - x$. Då blir mängden av alla punkter (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$ lika med grafen till $f(x)$.
   (b) Eftersom både $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ och att $f(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$. Men då är inte f någon funktion och allså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.
   (c) Eftersom både $(1, 1)$ och $(1, -1)$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1) = 1$ och att $f(1) = -1$. Men då är inte f någon funktion och allså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.

2. Dessa grafer ska ritas: $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = x^2 + 1$ och $y = (-x)^2 (= x^2)$.

3. Se Figur 68.

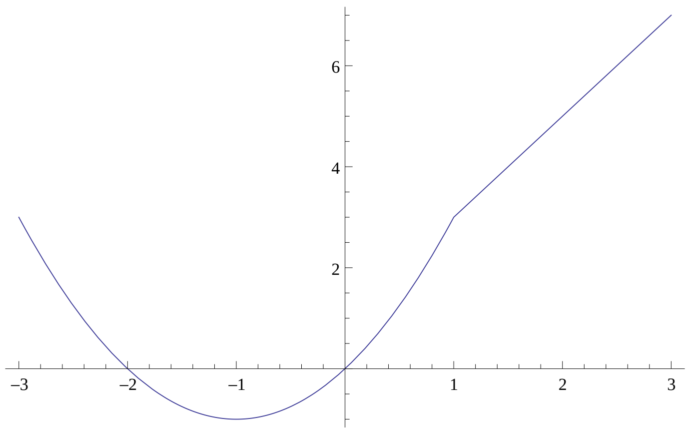
4. $f^{-1}(x) = x/2$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

5. $f^{-1}(x) = (x - 5)/3$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

6. $y = x/2 + 11/2$.

7. $y = 10x/9 + 25/3$

8. (a) $x = 3$
   (b) $x = 1$



Figur 68: Grafen till $f(x) = x^2 + 2x$ då $x \leq 1$ och $2x + 1$ då $x > 1$.

9. 6.

10. $\lambda = \ln 2/T$.

11. (a) $x = -1$
    (b) $t = 1$
    (c) saknar lösning.

12. (a) $x = 4$
    (b) $-\frac{1}{2}$
    (c) $x_1 = 2, x_2 = 5$.

13. 65/24

14. Genom att sätta $x = -1$ får vi ekvationen $y^2 = -1 + 4 - 1 = 2$, vilket ger att $(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2}$ är punkter på kurvan. Genom att sätta $x = 3$ får vi ekvationen $y^2 = 27-12-1 = 14$, vilket ger att $(3, \sqrt{14})$, $(3, -\sqrt{14}$ är punkter på kurvan.

Avsnitt 3.4

1. (a) $x > -7$
   (b) $x < -3$ eller $x > 1$
   (c) $x \geq 2$ eller $x = -2$.

2. Skärningspunkterna är $(-3/2 - \sqrt{21}/2, 4 + \sqrt{21})$ och $(-3/2 + \sqrt{21}/2, 4 - \sqrt{21})$. För $x < -3/2 - \sqrt{21}/2$ eller $x > -3/2 + \sqrt{21}/2$ gäller att $f(x) > g(x)$.

Avsnitt 3.5

1. -

2. 50 cm^2.

3. 2 cm.

4. (a) $-\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) 1

5. $\pm 45° + n \cdot 360°, \pm 135° + n \cdot 360°$

6. Perioden är 1080°, amplituden är 5 och fasförskjutningen är 45° åt vänster.

7. $\frac{1}{2}$

8. $x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ och $x = \pm\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, alternativt $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$.

9. (a) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
   (b) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

Avsnitt 3.7

1. $5x^4 + 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 6x$

2. $2\cos(2x) - 2\sin(2x)$

3. 0, vilket följer direkt från sambandet $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

4. (a) 2
   (b) 1
   (c) $5 \cdot 4^{10}(= 20 \cdot 4^9)$

5. (a) Minimum i 10, funktionsvärde -110, maximum i -1, funktionsvärde 11.
   (b) Minimum i 2, funktionsvärde -4, maximum i -10, funktionsvärde 152.

6. Tangentens ekvation är $y = 23x - 31$.

7. $(1, 10)$ är lokalt maximum och $(4, -17)$ är lokalt minimum.

8. $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ och $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$.

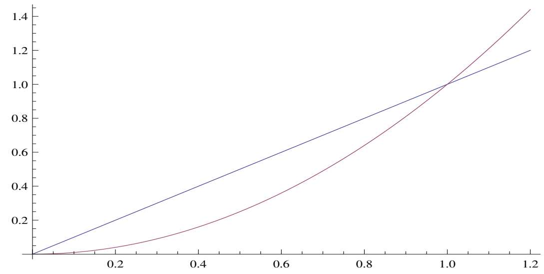
Avsnitt 3.8

1. (a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$
   (b) $\ln(|x|) - \frac{1}{x} + C$
   (c) $\frac{e^{3x}}{3} + C$
   (d) $\frac{2x^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x} + C$
   (e) $\frac{e^{ax+b}}{a} + C$

2. (a) $\frac{10}{3}$
   (b) $-1 + \frac{1}{e^2} + 2e$
   (c) $\frac{16\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7}$

3. För att ta reda på när kurvorna skär varandra sätter vi $x = x^2$, vilket satisfieras av $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$. Då x ligger mellan 0 och 1 så ligger kurvan $y = x$ ovanför kurvan $y = x^2$, se Figur 69.

   Alltså ska vi beräkna arean
   $$A = I_1 - I_2,$$
   där
   $$I_1 = \int_0^1 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



Figur 69: Kurvan $y = x^2$ och linjen $y = x$.

och

$$I_2 = \int_0^1 x^2 \; dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

vilket ger

$$A = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$