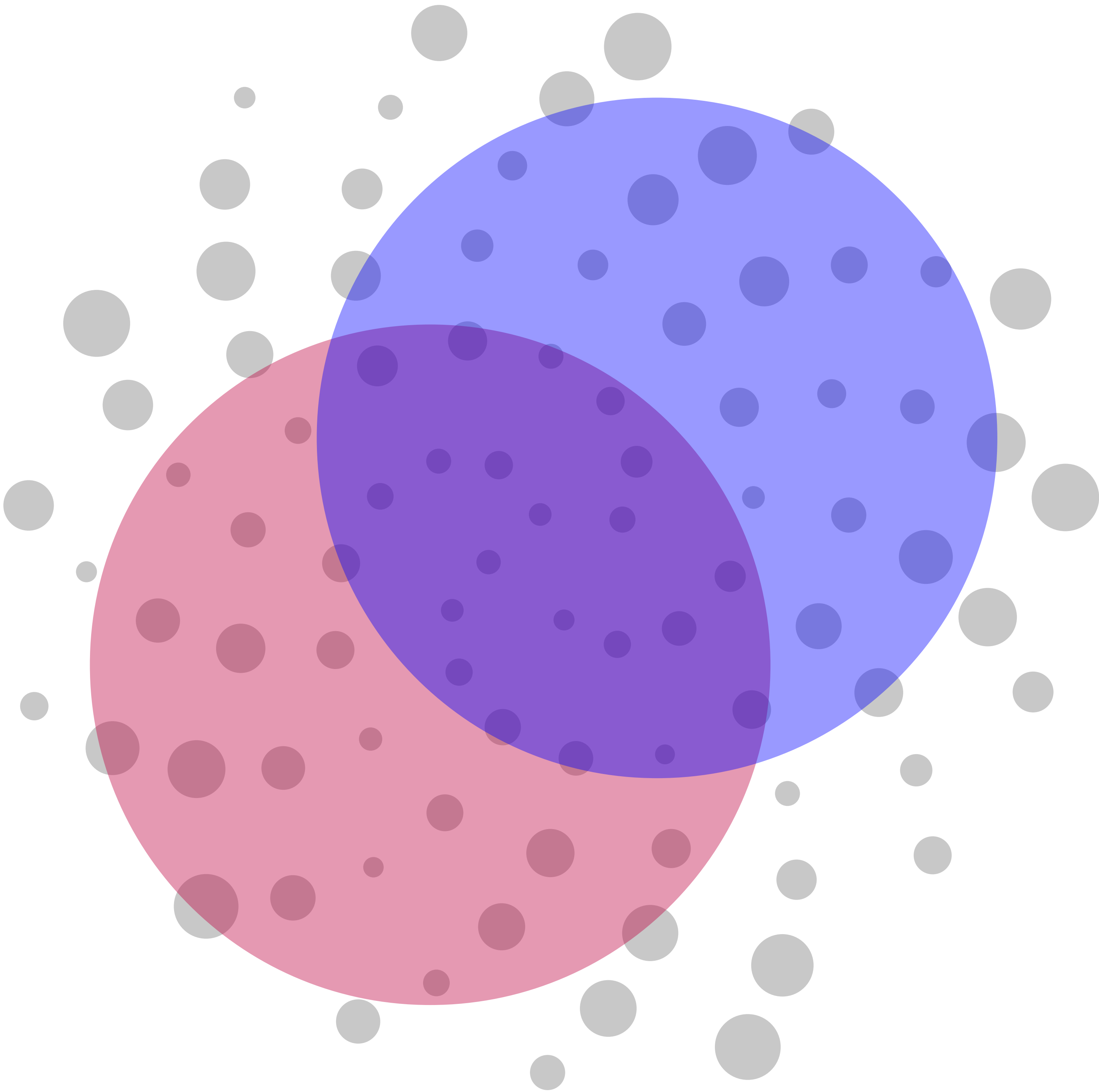
Alexandersson, Ericsson & Lundqvist

Förberedande kurs i matematik



Introduktion

Förord

Detta material är avsett att introducera matematik för nya universitets- och högskolestudenter och är skrivet som kurslitteratur till ”Förberedande kurs i matematik”, som är en distanskurs utvecklad av Stockholms universitet. Kursen riktar sig till blivande eller nya studenter i ämnet, men även till de som vill få en djupare bild av matematiken än vad som ryms i gymnasiets kurser. Materialet går igenom till viss del grundläggande gymnasiematematik från ett universitetsperspektiv, men tar också upp nya begrepp som kommer vara användbara för framtida studier på universitet eller högskola. Läsaren förväntas ha kunskaper som minst motsvarar gymnasiets Matematik 3.

Innehållet är uppdelat i tre kapitel, som i sin tur är indelade i avsnitt med tillhörande övningar som läsaren uppmanas att göra. Övningarna är tänkta att göras utan hjälp av miniräknare eller dator.

Kapitel 1 består till stor del av en presentation av olika typer av tal och regler för hur man räknar med dem. Kapitlet utgår från de positiva heltalen och motiverar en rad utvidgningar för att till slut komma fram till de komplexa talen.

Kapitel 2 behandlar algebra och kombinatorik. Kapitlet innehåller även en kort introduktion till mängdlära och logik.

Kapitel 3 är mer omfattande. Inledningsvis definierar vi funktionsbegreppet med hjälp av begreppen från mängdläran och ger en översikt av de vanligaste funktionerna. De trigonometriska funktionerna ges en hel del utrymme. Vi använder därefter teori om gränsvärden för att definiera derivata och ser hur dessa kan beräknas. Slutligen definieras integraler och i ett flertal exempel beräknas integraler med hjälp av analysens huvudsats.

Vi uppmanar dig att ta god tid på dig när du läser, eftersom matematisk text kan vara svår att snabbt tillgodogöra sig. Tänk igenom det du läser. Troligen finns det delar som du inte helt förstår vid första läsningen. Markera det du inte förstår och återkom till det senare. Vi vill poängtera att det krävs mycket övning att själv lösa problem för att få en god förståelse för begrepp och metoder.

Många personer har bidragit till utvecklingen av detta läromaterial. Vi vill särskilt tacka Tanja Bergkvist, Madeleine Leander och Elin Ottergren som skrivit material till de tidigare upplagorna och som vi tagit inspiration av, samt tacka Emil Eriksson, Matilda Galmar, Lars Lidvall, Kilian Liebe, Eva Nygren och Joel Persson som bistått med hjälp inför lanseringen av den sjunde upplagan.

Vid eventuella tryckfel, skicka gärna mail till `per.alexandersson@math.su.se`.

Stockholm, juni 2024
Författarna

Sjunde upplagan, första tryckningen, version 9 juni 2026, 15:07

Innehåll

Veckoplanering

Nedan är ett förslag på hur man kan planera sina studier om man läser kursen på helfart. Observera att det finns mer material på kursens hemsida.

Vecka	Att göra
Vecka 1	
	Läs Avsnitt 1.1–1.3. Gör tillhörande problemsamlingar och slutprov.
	Läs texterna *Att läsa matematisk text* samt *Lösa matematiska problem*. Läs Avsnitt 1.4–1.5. Gör tillhörande problemsamlingar och slutprov.
Vecka 2	
	Läs Avsnitt 1.6–1.8. Skriv och lämna in lösning på Inlämning 1.
	Läs Avsnitt 2.1–2.3. Komplettera Inlämning 1 om det behövs.
	Repetera. Gör problemsamlingar och slutprov.
Vecka 3	
	Läs Avsnitt 2.4–2.6.
	Repetera. Skriv och lämna in lösning på Inlämning 2.
	Läs Avsnitt 3.1–3.2. Gör problemsamlingar och slutprov.
Vecka 4	
	Läs Avsnitt 3.3–3.4.
	Läs Avsnitt 3.5. Gör problemsamlingar och slutprov.
	Läs Avsnitt 3.6. Repetera.
Vecka 5	
	Läs Avsnitt 3.7. Gör problemsamlingar och slutprov.
	Läs Avsnitt 3.8. Gör problemsamlingar och slutprov.
	Repetera. Jobba med Inlämning 3.
Vecka 6	
	Förbered inför tentamen. Glöm inte att anmäla dig i god tid.

Kapitel 1
Tal

Vi inleder med att studera olika typer av tal och hur de vanliga räkneoperationerna fungerar för dem.

1.1. Positiva heltal och naturliga tal

För att räkna antal använder vi oss av de *positiva heltalen*: $1, 2, 3, 4$ och så vidare. De positiva heltalen kan illustreras på en tallinje. På tallinjen motsvaras addition av ett tal med 1 av att man ”tar ett steg åt höger” om talet. Och om vi adderar 2 till 6 är det ”två steg åt höger från 6”, vilket ger 8. I allmänhet *definierar* vi addition av ett positivt heltal som vi kallar a med ett annat, som vi kan kalla b, som att gå a steg till höger på tallinjen från b.

Mängden av de positiva heltalen betecknas $\mathbb{Z}_+$ och det gäller alltså att

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

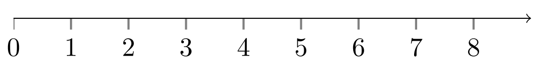
Här används klamrarna ”$\{$” och ”$\}$” används för att omsluta de tal, så kallade *element*, som finns i en mängd. Punkterna ”$\dots$” anger att följden fortsätter enligt mönstret till vänster, det vill säga att nästa tal är ett större än det föregående.

Vill man alltid kunna ange hur många man har av något så är ju även talet noll nödvändigt, för den händelse att man ingenting har. Vi låter de *naturliga talen* vara mängden

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Eftersom alla tal som finns i $\mathbb{Z}_+$ också finns i $\mathbb{N}$ så är $\mathbb{Z}_+$ en *delmängd* av $\mathbb{N}$, vilket kan skrivas

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}.$$



Figur 1: Början av tallinjen med de naturliga talen $\mathbb{N}$.

När naturliga tal adderas får man alltid ett nytt naturligt tal. Man säger att de naturliga talen är *slutna* under addition. Notera att även de positiva heltalen är slutna under addition.

Multiplikation av två naturliga tal definierar vi som upprepad addition enligt

$$a \cdot b = \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ stycken}}.$$

Eftersom multiplikation är upprepad addition och de naturliga talen är slutna under addition, följer att de naturliga talen också är slutna under multiplikation.

Subtraktion av ett naturligt tal b från ett annat naturligt tal a, definierar vi som det tal c som man ska addera till b för att få a. Om b är 5 och a är 7 så blir c lika med 2, ty $5 + 2 = 7$. Vi har alltså kommit fram till att $7 - 5 = 2$.

På tallinjen motsvaras subtraktion av att vi ”stegar åt vänster”. Om vi försöker subtrahera 5 från 4 skulle vi alltså ”starta på position fyra och gå fem steg åt vänster”. Men tallinjen med de naturliga talen börjar vid noll så något tal som motsvarar $4-5$ finns inte med. De naturliga talen är alltså *inte* slutna under subtraktion.

1.1.1. Räknelagar för heltal

Om a är ett positivt tal så definierar vi det negativa talet $-a$ som det tal vilket vid addition med a ger summan noll, alltså

$$a+(-a)=0.$$

På detta sätt utvidgar vi de naturliga talen till alla *heltal*, med vilket vi menar mängden

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\},$$

där beteckningen $\mathbb{Z}$ kommer från tyskans ”Zahl”, som betyder tal. Det gäller att

$$\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}.$$

Om vi åter tänker på tallinjen så innebär sambandet $a+(-a)=0$ att vi vid addition med negativa tal går åt vänster (så man kommer tillbaka till 0). Talet $-a$ kan ses som resultatet av additionen $0+(-a)$, och hamnar därför a steg åt vänster från position 0. Med de hela talen har vi då löst problemet med subtraktionen $4-5$. Till vänster om noll på tallinjen har vi det negativa talet -1.

Notera att vi använder samma tecken för två olika betydelser: minustecknet som används i $4-5$ står för subtraktion, men minustecknet i -1 står för att det är ett negativt tal. Ytterligare en betydelse som minustecknet har är som teckenbytare; $-x$ ger ett negativt tal om x är positivt och ett positivt tal om x är negativt.

Subtraktion med ett negativt tal motsvaras på tallinjen av att man stegar till höger. Uttrycket $5-(-3)$ är därmed lika med $5+3$. När vi subtraherar ett heltal från ett annat heltal får vi ett nytt heltal, så de hela talen är alltså slutna under subtraktion.

Man kan bevisa att följande grundläggande samband gäller för addition av heltal:

(i)	$a+b=b+a$	kommutativa lagen för addition
(ii)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	associativa lagen för addition
(iii)	$-(-a)=a$	negeringslagen.

På grund av den associativa lagen är det helt okej att skriva $a+b+c$ utan parenteser eftersom det inte spelar någon roll om vi först lägger ihop a och b eller b och c.

Exempel 1.1.1. Vi har att

$$(5+3)+2=(3+5)+2=3+(2+5)=3+7,$$

där vi först använt den kommutativa lagen och sedan den associativa lagen.

När vi skriver $a-b$ så är detta en kortare form för $a+(-b)$.

Exempel 1.1.2. Vi har att $4-(-4)=4+(-(-4))=4+4=8$.

Multiplikation av positiva heltal definierade vi inledningsvis som upprepad addition. På liknande sätt kan vi definiera multiplikation för vår större klass av heltal genom att för naturliga tal x och y låta

$$x\cdot(-y)=\underbrace{(-y)+\cdots+(-y)}_{x\text{ stycken}}.$$

Det är nu möjligt att lista ytterligare några grundläggande samband för heltalen.

(iv)	$a \cdot b = b \cdot a$	kommutativa lagen för multiplikation
(v)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	associativa lagen för multiplikation
(vi)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	distributiva lagen

Den distributiva lagen behärskas vanligtvis bra från vänster till höger, men det är viktigt att även kunna gå från höger till vänster, det vill säga att skriva om uttryck på formen $a \cdot b + a \cdot c$ som $a \cdot (b + c)$.

Lagarna kombineras så att vi kan hantera räkningar även med fler termer och faktorer.

Exempel 1.1.3. Vi har att $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

Exempel 1.1.4. Faktorisering ger att $10ab + 2b^2 = 2b(5a + b)$.

Vi ska nu illustrera hur man kan använda de grundläggande sambanden för heltalen för att bestämma vad produkten av två negativa tal är. Antag att a och b är positiva. Vi har att

$$0 = (-a) \cdot 0 = (-a) \cdot (b + (-b)).$$

Genom att utnyttja den distributiva lagen får vi

$$(-a) \cdot (b + (-b)) = (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b) = -a \cdot b + (-a) \cdot (-b),$$

det vill säga

$$0 = -a \cdot b + (-a) \cdot (-b).$$

Flyttar vi nu över den första termen i högerledet till vänsterledet får vi

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b).$$

Produkten av två negativa tal är alltså lika med produkten av deras positiva ”motsvarigheter”.

1.1.2. Potenser

För att lättare hantera uttryck av typen $x \cdot x \cdot x$ har man infört *potenser*. Vi skriver

$$x \cdot x \cdot x = x^3,$$

där x är potensens *bas* och 3 är potensens *exponent*. Mer generellt, för ett heltal a och ett positivt heltal b låter vi

$$a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ stycken}} .$$

Potenser förhåller sig alltså till multiplikation på samma sätt som multiplikation förhåller sig till addition. Men det är viktigt att notera att till skillnad från multiplikation så spelar ordningen roll: i allmänhet gäller nämligen att $a^b \neq b^a$.

Med potenser kan vi på ett mycket litet utrymme ge en övre gräns för antal elementarpartiklar i hela universum enligt modellerna från modern fysik, nämligen 2^{300}.

Vi ser enkelt att

$$x^3 \cdot x^4 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = \underbrace{x \cdots x}_{\text{sju gånger}} = x^7$$

och att

$$\left(x^3\right)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6.$$

Med olika baser men samma exponent har vi till exempel

$$(x \cdot y)^3 = x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y = (x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y) = x^3 \cdot y^3.$$

Allmänt gäller följande räkneregler:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \text{och} \quad (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a.$$

Notera att x^{a^b} innebär att man först ska ta a^b och sedan upphöja x till detta tal, alltså $x^{a^b} = x^{\left(a^b\right)}$, vilket inte är detsamma som $(x^a)^b$.

Exempel 1.1.5. Vi har följande exempel på beräkningar med potenser:

(a) $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$,

(b) $\left(2^4\right)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$,

(c) $2^{4^5} = 2^{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = 2^{1024}$,

(d) $9^2 \cdot 3^5 = \left(3^2\right)^2 \cdot 3^5 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$,

(e) $(-1)^4 = \left((-1)^2\right)^2 = 1^2 = 1$.

Kuriosa. En sägen berättar om när uppfinnaren av det schackliknande spelet Shaturanja visade upp spelet för kungen av Indien. Kungen blev så imponerad att han ville ge uppfinnaren en belöning, varpå uppfinnaren önskade sig ett vetekorn för den första rutan på schackbrädet, två vetekorn för den andra rutan, fyra vetekorn för den tredje, åtta vetekorn för den fjärde, och så vidare. Kungen tyckte att detta lät som en rimlig belöning och beviljade uppfinnarens önskning, han insåg inte att summan $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{63}$ med råge översteg antalet vetekorn i hela världen.

1.1.3. Prioriteringsregler

Att uttrycket $3 + 2 \cdot 4$ är lika med 11 och inte 20 ser nog många som självklart. Men anledningen till detta beror endast på en fastställd konvention. Vi har helt enkelt bestämt att multiplikation och division har högre *prioritet* än addition och subtraktion. Om det motsatta hade gällt så hade $3 + 2 \cdot 4$ varit lika med $5 \cdot 4 = 20$. Vill man dock göra beräkningen enligt det senare så tar man parenteser till hjälp: $(3 + 2) \cdot 4$. Beräkningar ska ske i följande ordning:

1. Beräkna parenteser.
2. Beräkna potenser.
3. Beräkna multiplikation och division.
4. Beräkna addition och subtraktion.

Inom parenteserna i punkt 1 beräknar man som bekant också enligt prioriteringsreglerna.

Exempel 1.1.6. Beräkna $(-1)^3 + 3 \cdot \left(\left(4 - 2^3\right)^2 - 5\right)$.

Lösningsförslag. Vi använder prioriteringsreglerna och får

$$(-1)^3 + 3 \cdot \left(\left(4 - 2^3\right)^2 - 5\right) = -1 + 3 \cdot \left((4 - 8)^2 - 5\right) = -1 + 3 \cdot \left((-4)^2 - 5\right)$$

$$= -1 + 3 \cdot (16 - 5) = -1 + 3 \cdot 11 = -1 + 33 = 32. \qquad \square$$

Var noga med att sätta ut parenteser på korrekt sätt. Kom ihåg att -4^2 och $(-4)^2$ inte är samma tal och att multiplikation av 2 med -3 ska skrivas som $2 \cdot (-3)$ och inte på något annat sätt ($\cdot$ och $-$ ska inte förekomma i följd som $\cdot -$).

1.1.4. Heltalsdivision

Division av heltalet a med det nollskilda heltalet b definieras som det tal c så att $a = b \cdot c$. Om $a = 10$ och $b = 5$ så blir $c = 2$, eftersom $10 = 5 \cdot 2$, så $a/b = c$. Men när man delar ett heltal med ett annat blir resultatet inte alltid ett heltal. Till exempel går divisionen 17/5 inte "jämnt ut", eftersom det inte finns något heltal c så att $17 = 5 \cdot c$. Men genom att införa begreppen *kvot* och *rest* kan man utföra så kallad heltalsdivision. Kvoten vid division av ett positivt heltal a med ett positivt heltal b anger det maximala antalet gånger vi kan dra b från a och fortfarande få någonting icke-negativt kvar. Det vi får kvar är den så kallade *resten*.

Exempel 1.1.7. Beräkna kvoten och resten då 17 delas med 5.

Lösningsförslag. Kvoten är det maximala antalet gånger som vi kan dra bort 5 från 17 och fortfarande få någonting icke-negativt kvar. Eftersom $3 \cdot 5 = 15$ men $4 \cdot 5 = 20$ så blir kvoten 3. Vi har att $17 - 3 \cdot 5 = 2$, alltså är resten lika med 2. □

Mer formellt söker vi vid heltalsdivision av talet $a > 0$ med talet $b > 0$ kvoten k och resten r så att

$$a = kb + r, \quad \text{där} \quad 0 \leq r < b.$$

Detta samband kan skrivas om som

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b},$$

vilket kanske är mer bekant sen tidigare: divisionen a delat med b ger "k hela och r stycken b-delar".

Exempel 1.1.8. Beräkna kvoten och resten då 106 delas med 21.

Lösningsförslag. Eftersom $106 = 5 \cdot 21 + 1$ är kvoten k lika med 5 och resten r lika med 1. □

Exempel 1.1.9. Beräkna kvoten och resten då 20 delas med 4.

Lösningsförslag. Eftersom $20 = 4 \cdot 5 + 0$ är kvoten k lika med 5 och resten r lika med 0. □

När a dividerat med b "går jämnt ut" är resten noll. Vi säger att a är *delbart* med b, eller att b är en *delare* till a.

1.1.5. Jämna och udda tal

Du har säkert lagt märke till att summan av två jämna heltal blir ett nytt jämnt heltal, likaså att summan av två udda heltal blir ett jämnt heltal och att summan av ett jämnt och ett udda heltal blir udda.

Vi ska nu utföra ett matematiskt bevis för detta, men först måste vi vara överens om definitionen på jämna och udda tal.

Definition 1. Ett heltal är *jämnt* om det är delbart med två, det vill säga om det kan skrivas på formen $2a$, för något heltal a.

Definition 2. Ett heltal är *udda* om det lämnar rest ett vid division med två, det vill säga om det kan skrivas på formen $2a + 1$ för något heltal a.

Vi kan nu formulera och bevisa våra utsagor.

Sats 1. Summan av två jämna heltal är ett jämnt heltal.

Bevis. Eftersom talen är jämna kan det första skrivas som $2a$ och det andra skrivas som $2b$, där a och b är heltal. Vi får summan

$$2a + 2b = 2(a + b),$$

vilket är ett jämnt tal enligt definition. Alltså är summan av två jämna heltal ett jämnt heltal.

Sats 2. Summan av två udda heltal är ett jämnt heltal.

Bevis. Eftersom talen är udda kan det första skrivas som $2a+1$ och det andra skrivas som $2b+1$, där a och b är heltal. Vi får summan

$$(2a+1)+(2b+1)=2a+2b+2=2(a+b+1),$$

vilket är ett jämnt tal. Alltså är summan av två udda heltal ett jämnt heltal.

Sats 3. Summan av ett udda och ett jämnt heltal är ett udda heltal.

Bevis. Det udda talet kan skrivas som $2a+1$ och det jämna kan skrivas som $2b$, där a och b är heltal. Vi får summan

$$(2a+1)+(2b)=2(a+b)+1,$$

vilket är ett udda tal. Alltså är summan av ett udda och ett jämnt heltal ett udda heltal.

Det finns liknande satser för multiplikation och vi väljer att bevisa en och lämnar övriga två som övningar.

Sats 4. Produkten av ett udda och ett jämnt heltal är ett jämnt heltal.

Bevis. Det udda talet kan skrivas som $2a+1$ och det jämna kan skrivas som $2b$, där a och b är heltal. Vi får produkten

$$(2a+1)\cdot 2b=2((2a+1)b),$$

vilket är ett jämnt tal. Alltså är produkten av ett udda och ett jämnt heltal ett jämnt heltal.

Övningar 1.1

1. Beräkna $1-(5-4)$ och $(-3)(7+(-5)(-3+2))$.
2. Beräkna $(-1)^3$ och $(-1)^{12}$.
3. Förenkla $-(a-b-(a+b))+(a+b)$ och $(a+b)(c+d)-c(a+b)$.
4. Visa att $(a+b)^3=a^3+3ab^2+3a^2b+b^3$.
5. Ge ett exempel på när $(x^a)^b=x^{(a^b)}$ och ett exempel på när $(x^a)^b\neq x^{(a^b)}$.
6. Beräkna kvoten k och resten r då 107 delas med 7.
7. Vad blir resten då 293 delas med 17?
8. Bevisa att produkten av två jämna heltal är ett jämnt heltal.
9. Bevisa att produkten av två udda heltal är ett udda heltal.

1.2. Primtal

Om vi utgår från talet 1 och använder oss av upprepad addition så får vi talen $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$ och så vidare, det vill säga alla positiva heltal. Med talet 1 och upprepad addition kan vi alltså skapa hela $\mathbb{Z}_+$.

Låt oss betrakta motsvarande situation för multiplikation. Utgår vi från talet 1 och använder oss av multiplikation så får vi inget annat tal än 1. Tar vi till talet 2, kan vi med multiplikation generera talen $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ och så vidare. Använder vi även 3 får vi till exempel $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$ och $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Sammanfattningsvis ger 2 och 3 mängden

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \dots\}.$$

Vi får oändligt många tal men saknar till exempel 5. Med hjälp av talet 5 kan vi fylla ”luckorna” $5, 10, 15$ och så vidare. Det minsta tal större än 1 som då saknas är 7 och lägger vi även till det får vi

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \dots\}.$$

Mängden blir tätare, men hur ska vi bära oss åt om vi vill kunna få alla positiva heltal på det här sättet? Vi saknar till exempel talet 11. Vi kan fortsätta och lägga till 11 och sedan 13, men då kommer vi att upptäcka att vi saknar talet 17. I själva verket måste man lägga till oändligt många tal. De tal vi behöver för att få varje naturligt tal större än 1 med hjälp av multiplikation kallas för *primtal*. Talen $2, 3, 5, 7, 11, 13$ och 17 är de sju första primtalen.

Kuriosa. Att det finns oändligt många primtal kan man bevisa med hjälp av ett så kallat *motsägelsebevis*. Man antar att det bara finns ändligt många primtal och visar att detta leder till en motsägelse, varpå man drar slutsatsen att antalet primtal är oändligt.

Genom att först definiera vad ett sammansatt tal är följer här en precis beskrivning av vad som menas med ett primtal.

Definition 3. Ett heltal $a > 1$ är *sammansatt* om det kan skrivas som en produkt av två heltal b och c som är större än 1, det vill säga $a = b \cdot c$, där $b > 1$ och $c > 1$.

Definition 4. Ett positivt heltal som är större än 1 och som *inte* är sammansatt kallas för ett *primtal*.

Exempel 1.2.1. Talen 4, 6, 8 och 9 är sammansatta eftersom

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2 \cdot 4 \quad \text{och} \quad 9 = 3 \cdot 3,$$

medan talen 2, 3, 5 och 7 är primtal eftersom dessa inte kan skrivas som en produkt av positiva heltal större än 1.

Kuriosa. Följande är exempel på några speciella primtal.

- 2 är det enda jämna primtalet. (Varför?)
- 1111111111111111111 är det näst minsta primtalet som skrivs med bara ettor. (Vilket är det minsta?)
- De så kallade Fermatprimtalen 3, 5, 17, 257, 65537 kan skrivas på formen $2^{2^n} + 1$ med $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Fermat förmodade att alla tal på den formen, med n ett icke-negativt heltal, var primtal men Euler visade att $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ är sammansatt. Huruvida det finns fler än fem Fermatprimtal är ett olöst problem. Man har visat att $2^{2^n} + 1$ är sammansatt för talen $n = 5, 6, \dots, 32$.
- År 2001 så konstruerades ett *olagligt primtal*. Detta var ett primtal vars binära representation också var ett datorprogram för att knäcka copyright-skyddet på DVD-filmer.

Lägg märke till att begreppet sammansatt tal är nära knutet till begreppet delbarhet från Avsnitt 1.1.4, nämligen att ett heltal b är en *delare* till ett heltal a om $a = b \cdot c$ för något heltal c. Så länge vi håller på med heltal så är *faktor* en synonym till *delare*.

Exempel 1.2.2. Talet 6 har de positiva delarna 1, 2, 3, 6. Talet 7 har de positiva delarna 1 och 7. Talet 8 har de positiva delarna 1, 2, 4, och 8.

Kuriosa. Ett tal kallas *perfekt* om summan av de positiva delarna är lika med två gånger talet självt. Till exempel är 6 ett perfekt tal eftersom $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$. Hur många perfekta tal som finns är en öppen fråga. Kan du hitta något annat perfekt tal än 6? Det finns ett till som är mindre än 30.

Med hjälp av definitionen av delare så kan man definiera sammansatta tal och primtal på ett alternativt sätt: Ett positivt heltal som är större än 1 är sammansatt om det har fler än två positiva delare större än 1. Ett positivt heltal som endast har två positiva delare, sig själv och 1, kallas för ett primtal.

Ibland talar man även om *äkta delare*. Man säger att b är en äkta delare till a om b är en positiv delare till a och b är skilt från både 1 och a. Ett primtal är alltså ett tal som saknar äkta delare.

1.2.1. Primtalsfaktorisering

Betrakta talet 520. Eftersom talet är jämnt så är det delbart med två och vi kan skriva

$$520 = 2 \cdot 260.$$

Även 260 är delbart med två och vi skriver

$$260 = 2 \cdot 130.$$

Återigen, 130 är jämnt och vi får

$$130 = 2 \cdot 65.$$

Vi ser att fem är en positiv delare till 65 och

$$65 = 5 \cdot 13.$$

Vi har alltså visat att

$$520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Lägg märke till att $2, 5$ och 13 alla är primtal. Vi säger att vi har *primtalsfaktoriserat* 520. Primtalsfaktoriseringen av ett positivt heltal är unik (upp till ordningen av faktorerna). Detta är Aritmetikens fundamentalsats och tas upp i högre kurser i algebra.

Primtalsfaktoriseringen av ett tal hjälper oss att bestämma delarna till talet som följande exempel visar.

Exempel 1.2.3. Hur många positiva delare har talet 520?

Lösningsförslag. Enligt ovan gäller det att $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$. Läsaren bör övertyga sig om att de positiva delarna till talet är talen på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. Detta ger delarna

$$\begin{array}{llll}
2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 1 & 2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 13 & 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 5 & 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 65 \\
2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 2 & 2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 26 & 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 10 & 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 130 \\
2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 4 & 2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 52 & 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 20 & 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 260 \\
2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 8 & 2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 104 & 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 40 & 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 520.
\end{array}$$

Det finns alltså 16 positiva delare till 520. □

Om man vill ta reda på om ett tal a är ett primtal så kan man undersöka om a delas av primtalen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Har man gått igenom alla primtal som är mindre än a och inte funnit någon positiv delare så vet man att a självt måste vara ett primtal. Men man behöver i själva verket inte testa alla primtal fram till talet a, det räcker att testa alla primtal som är mindre än eller lika med $\sqrt{a}$. (Kan du fundera ut varför det är så?) Trots detta är det beräkningstungt att primtalsfaktorisera, metoden att testa är ineffektiv.

Observera att primtalsfaktoriseringen av ett primtal är primtalet självt.

Exempel 1.2.4. Är 257 ett primtal?

Lösningsförslag. Vi börjar med att uppskatta hur stort $\sqrt{257}$ är. Eftersom $20^2 = 400$ så gäller det att $\sqrt{400} = 20$. Alltså måste $\sqrt{257}$ vara mindre än 20. Vi har att $17^2 = 289$, alltså måste $\sqrt{257}$ även vara mindre än 17. Men $16^2 = 256$, så $\sqrt{257}$ är större än 16. Primtalen som är mindre än 17 är $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Eftersom 257 är udda så kan det inte vara delbart med 2. Eftersom $257 = 3 \cdot 85 + 2$ lämnas resten 2 vid division med tre och är alltså inte delbart med tre. Vi har att $5 \cdot 51 + 2 = 257$, alltså är 257 inte heller delbart med fem. Det lämnas som en övning till läsaren att verifiera att inte heller 7, 11 och 13 är delare till 257. Alltså är 257 ett primtal. □

Övningar 1.2

1. Hur många positiva delare har talet 12?
2. Hur många äkta delare har talet 12?
3. Hur många positiva delare har talet $2^3 \cdot 5 \cdot 23^4$?
4. Avgör om talen 85, 133 och 661 är primtal. Om något tal inte är ett primtal så primtalsfaktorisera det och bestäm antalet positiva delare.
5. Primtalsfaktorisera talen 1024 och 1331.
6. Försök att primtalsfaktorisera ditt personnummer eller telefonnummer med hjälp av en miniräknare.

1.3. Moduloräkning

Moduloräkning, eller *kongruensräkning*, hänger samman med begreppet rest och är något vi ofta använder oss av utan att reflektera över det. Låt oss börja med ett exempel.

Exempel 1.3.1. Niklas går och lägger sig klockan 23:00 och vill sova åtta timmar för att vara pigg dagen efter. Vad ska han ställa klockan på (förutsatt att han somnar direkt när han lägger sig)?

Lösningsförslag. För att ta reda på detta skulle man kunna tänka sig att man lägger till 8 till 23:

$$23 + 8 = 31.$$

Men försök ställa klockan på 31! Istället ”börjar vi om på noll när vi kommer till 24”, vilket blir detsamma som att dra bort 24 timmar. Vi får då

$$23 + 8 - 24 = 31 - 24 = 7.$$

Niklas borde alltså ställa klockan på 07:00. □

Det ovanstående är ett exempel på räkning *modulo* 24. Det digitala klockor visar är egentligen resten vid heltalsdivision med 24. Låt oss nu ge en formell definition.

Definition 5. Om två tal a och b skiljer sig åt med en multipel av n, det vill säga att det existerar ett heltal k så att $a - b = k \cdot n$, så säger vi att a och b är *kongruenta modulo n*. Detta skrivs $a \equiv b \pmod{n}$ eller $a \equiv_n b$ och utläses ”a är kongruent med b modulo n” eller ”a är lika med b modulo n”.

Exempel 1.3.2. Det gäller att $18 \equiv_4 14$ eftersom $18 - 14 = 4$, vilket så klart är en multipel av fyra.

Speciellt gäller att om talet a lämnar resten r vid division med b, så är a och r kongruenta modulo b, eftersom $a = k \cdot b + r$ är detsamma som $a - r = k \cdot b$. Och omvänt gäller att om a och r är kongruenta modulo b och $0 \leq r < b$ så lämnar a resten r vid division med b.

Exempel 1.3.3. Resten då 120 delas med 17 är 1, ty $120 = 7 \cdot 17 + 1$ och alltså är $120 \equiv 1 \pmod{17}$.

Exempel 1.3.4. Det gäller att $27 \equiv_4 3$ och eftersom $0 \leq 3 < 4$ så lämnar 27 resten 3 vid division med 4.

Exempel 1.3.5. Idag är det tisdag, vad är det för veckodag om 37 dagar?

Lösningsförslag. Vi börjar med att notera att 37 dagar är detsamma som fem veckor och två dagar. Vi söker alltså den veckodag som är två dagar efter tisdag, det vill säga torsdag. Detta svarar mot beräkningen

$$37 \equiv_7 2.$$ □

Vid moduloräkning kan man använda de tre räknesätten addition, subtraktion och multiplikation för att förenkla beräkningarna. Division är däremot inte definierat i allmänhet.

Sats 5. Låt a vara ett positivt heltal och låt m_1, m_2, n_1 och n_2 vara heltal sådana att $m_1 \equiv n_1 \pmod{a}$ och $m_2 \equiv n_2 \pmod{a}$. Då gäller

(i) $m_1 + m_2 \equiv n_1 + n_2 \pmod{a}$,

(ii) $m_1 - m_2 \equiv n_1 - n_2 \pmod{a}$,

(iii) $m_1 \cdot m_2 \equiv n_1 \cdot n_2 \pmod{a}$.

Innan vi bevisar satsen ska vi illustrera hur den kan användas med ett par exempel.

Exempel 1.3.6. Vad blir resten då $18 + 11$ delas med 5?

Lösningsförslag 1. Vi lägger först ihop talen och tar reda på resten vid division med 5.

$$18 + 11 = 29 \equiv 4 \pmod{5}$$

eftersom $29 = 5 \cdot 5 + 4$. Resten är 4. □

Lösningsförslag 2. Enligt (i) från Sats 5 kan vi först ta reda på resten modulo 5 för de båda talen 11 och 18 och sedan addera dem. Detta ger $18 + 11 \equiv_5 3 + 1 = 4$. □

Exempel 1.3.7. Beräkna $12 - 7 \pmod{3}$. Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.

Lösningsförslag 1. Vi har $12 - 7 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$. □

Lösningsförslag 2. Vi använder (ii) från Sats 5 och tar först reda på resten modulo 3 för de båda talen 12 och 7, för att sedan subtrahera dem. Vi har att $12 \equiv_3 0$ och $7 \equiv_3 1$ och får

$$12 - 7 \equiv 0 - 1 \equiv -1 + 3 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Observera att vi i sista steget adderade 3 eftersom -1 är ett negativt tal. □

Exempel 1.3.8. Beräkna $6 \cdot 7 \pmod{5}$. Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.

Lösningsförslag 1. Eftersom

$$6 \cdot 7 = 42 \equiv 2 \pmod 5$$

så är 2 det sökta svaret. □

Lösningsförslag 2. Använder vi (iii) från Sats 5, det vill säga att vi först tar reda på resten modulo 5 för de båda talen 6 och 7 och sedan multiplicerar resterna, får vi

$$6 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 5.$$ □

I dessa tre exempel spelade det ingen större roll om man använder metoden i lösningsförslag 1 eller 2. Men om man har stora tal är den andra metoden avsevärt mindre krävande rent beräkningsmässigt. Följande exempel illustrerar fördelen med att angripa faktorerna i en produkt innan vi utför multiplikationen.

Exempel 1.3.9. Bestäm resten då $38 \cdot 41 + 43 \cdot 36$ delas med 3.

Lösningsförslag. Vi har att

$$38 = 12 \cdot 3 + 2, \quad 41 = 13 \cdot 3 + 2, \quad 43 = 14 \cdot 3 + 1 \quad \text{och} \quad 36 = 12 \cdot 3 + 0.$$

Alltså är

$$38 \cdot 41 + 43 \cdot 36 \;\equiv\; 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \;\equiv\; 4 + 0 \equiv 1 \pmod 3.$$

Resten är alltså 1. □

Exempel 1.3.10. Vad blir resten då 4^7 delas med 7?

Lösningsförslag. Det gäller att $16 \equiv_7 2$, så genom att skriva

$$4^7 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot 4 = 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4$$

får vi

$$4^7 \equiv_7 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \equiv_7 2 \cdot 16 \equiv_7 2 \cdot 2 \equiv_7 4.$$

Resten då 4^7 delas med 7 är alltså 4. □

Exempel 1.3.11. Vad blir resten då 4^{127} delas med 7?

Lösningsförslag. För att lösa den här uppgiften använder vi potensreglerna tillsammans med den (iii) i Sats 5. Vi börjar med att undersöka låga potenser av 4, om någon av dessa ger resten 1 underlättas multiplikation.

Vi har att $4^2 \equiv_7 2$ och det följer att $4^3 \equiv_7 4 \cdot 2 \equiv_7 1$. Kan vi skriva om 4^{127} som ett antal potenser av 4^3 och eventuellt multiplicerat med någon mer 4:a blir räkningen enkel. Eftersom $127 = 3 \cdot 42 + 1$ så är

$$4^{127} = 4^{3 \cdot 42 + 1} = (4^3)^{42} \cdot 4.$$

Vi använder nu att $4^3 \equiv_7 1$ och får

$$(4^3)^{42} \cdot 4 \equiv_7 1^{42} \cdot 4 \equiv_7 4.$$

Resten är 4 även i denna uppgift. □

Exempel 1.3.12. Vad blir resten då 2^{125} delas med 6?

Lösningsförslag. Vi utnyttjar att $2^3 = 8$ och att $8 \equiv_6 2$. Ingen potens är kongruent med 1, men ersätter vi 2^3 med 2 upprepade gånger blir räkningen ändå rätt smidig. Med omskrivningen $125 = 3 \cdot 41 + 2$ i exponenten får vi

$$2^{125} = 2^{3 \cdot 41 + 2} = 2^{3 \cdot 41} \cdot 2^2 = \left(2^3\right)^{41} \cdot 2^2 \equiv_6 2^{41} \cdot 2^2 = 2^{43}.$$

Fortsätter vi på liknande sätt, med $43 = 3 \cdot 14 + 1$, får vi

$$2^{43} = 2^{3 \cdot 14} \cdot 2 = (2^3)^{14} \cdot 2 \equiv_6 2^{14} \cdot 2 = 2^{15} = (2^3)^5 \equiv_6 2^5 = 2^3 \cdot 2^2 \equiv_6 2 \cdot 4 \equiv_6 2.$$

Alltså lämnar 2^{125} resten 2 vid division med 6. □

För den intresserade läsaren ger vi nu beviset för Sats 5.

Bevis (av Sats 5.). Eftersom $m_1 \equiv_a n_1$ så är $m_1 - n_1 \equiv_a 0$, det vill säga $m_1 - n_1 = s \cdot a$, för något heltal s. På samma sätt följer det av $m_2 \equiv_a n_2$ att $m_2 - n_2 = t \cdot a$ för något heltal t.

Vi får att

$$(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = m_1 - n_1 + m_2 - n_2 = s \cdot a + t \cdot a = (s + t)a,$$

vilket innebär att $(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)$ är delbart med a. Men det betyder att

$$(m_1 + m_2) \equiv_a (n_1 + n_2),$$

vilket bevisar regel (i) i satsen.

Beviset för (ii) är i princip identiskt med beviset för regel ett och lämnas som en övning.

När det gäller (iii) har vi

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = (m_1 - n_1)m_2 + n_1(m_2 - n_2) = s \cdot a \cdot m_2 + n_1 \cdot t \cdot a = (s \cdot m_2 + t \cdot n_1)a.$$

Alltså är $m_1 m_2 - n_1 n_2$ delbart med a, från vilket det följer att $m_1 m_2 \equiv_a n_1 n_2$.

Kuriosa. Moduloräkning har en mycket viktig tillämpning inom kryptering. RSA-algoritmen—som många banker använder—utnyttjar en beräkningsasymmetri som uppstår vid just kongruensberäkningar.

Övningar 1.3

1. Vilken rest får man om $18 + 7$ divideras med 5?
2. Vilken rest ger 64 vid division med 3?
3. Idag är det fredag. Vilken veckodag är det om 101 dagar?
4. Vilken rest får man om $64 \cdot 78 - 65 \cdot 101$ delas med 5?
5. Vilken rest får man om 3^7 delas med 10?
6. Vilken rest får man om 2^{204} delas med 11?
7. Beräkna följande tal modulo 6:

$$36 + 23, \quad 36^{129} + 2186^{(5^2 \cdot 8/2 - 100)}, \quad 5^{345} + 55$$

8. Beräkna $38800 \cdot 5 \mod 3$.
9. Beräkna entalssiffran i talet 37^{120}.

10. *(Svårare)* Ett tal är jämnt delbart med 5 precis då dess entalssiffra antingen är 0 eller 5. Bevisa detta med hjälp av moduloräkning.

11. *(Svårare)* Siffersumman av ett tal är summan av de ingående siffrorna. Visa att ett tal är delbart med 3 om dess siffersumma är delbar med 3. Exempel: Talet 138 har siffersumman $1+3+8=12$ som är delbart med tre. Alltså är 138 delbart med tre enligt påståendet ovan. Tips: Nästa avsnitt om representation i med talbas 10 kan vara till hjälp.

12. *(Svårare)* En alternerande siffersumma för ett tal är summan av siffrorna med växlande tecken. Till exempel är den alternerande siffersumman hos 35478 lika med $3-5+4-7+8=3$. Ett tal är jämnt delbart med 11 precis då dess alternerande siffersumma är delbar med 11. Bevisa detta med hjälp av moduloräkning.

1.4. Representation av heltal

I tidig skolålder lär vi oss att tjugotre skrivs 23 och inte 20 3, som man skulle kunna tro om man lärt sig skriva både tjugo och tre. Vi är så vana vid hur vi skriver tal att vi knappast lägger märke till tanken bakom. Men det finns många andra sätt att skriva, eller med ett finare ord, *representera* tal på. Till exempel representerades talet tio som `X` och talet nittiofem som `XCV` i Romarriket. Det sättet är inget vi ska bry oss mer om här men vi ska titta lite närmre på hur man representerar tal i olika *talbaser*, vilket vi exemplifierar med vår bas 10 samt bas 2.

Om du vill beskriva hur många 23 äpplen är kan du rita tjugotre streck och säga att du har ett äpple för varje streck. Men denna metod fungerar inte så bra i praktiken, inte ens för ett så pass litet antal som tjugotre. Därför uppfanns *positionssystemet* som ett sätt att representera olika antal.

Låt oss titta på uttrycket 3124. Vilket antal representerar detta? Vi har att $3124 = 3\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$. Naturligtvis är 3124 inte alls samma som 1342—siffrornas position är betydande för talets värde och varje position motsvarar en viss potens av talet tio. Därför kallas vårt sätt att representera tal för positionssystemet med bas 10, även benämnt decimalsystemet.

Allmänt så representerar vi heltal i bas tio enligt följande. Talet

$$s_n\cdot 10^n + s_{n-1}10^{n-1} + \cdots + s_1\cdot 10^1 + s_0\cdot 10^0,$$

där varje tal s_i är ett heltal mellan noll och nio, skrivs med siffrorna som svarar mot talen $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1$ och s_0 i en följd, alltså som

$$s_n s_{n-1}\ldots s_1 s_0.$$

Till exempel så är $s_3 = 3$, $s_2 = 1$, $s_1 = 2$ och $s_0 = 4$ för talet 3124.

Tanken är att representationen ska vara unik, att varje tal bara ska kunna skrivas på ett enda sätt. Detta för att helt enkelt undvika förvirring. För att det ska gälla måste siffrorna s_i uppfylla att $0 \le s_i \le 9$.

Att vi använder just talet tio som bas beror på att vi har tio fingrar till hands som räknehjälpmedel. Men förutom att tio är antalet fingrar vi har så är det inget speciellt med detta tal. Vilket tal som helst kan vara bas i positionssystemet. De gamla babylonierna använde bas sextio och mayafolket bas tjugo. Vi ska här gå igenom hur vi kan representera tal i positionssystemet med bas 2, vilket brukar kallas för det *binära talsystemet*. En dator lagrar sin data i det binära systemet så denna lilla utflykt är mer än bara en matematisk övning.

1.4.1. Heltal i det binära talsystemet

I det binära talsystemet används basen två och de enda siffrorna är 0 och 1. Från tabellen framgår hur talet 28 representeras som 11100 i det binära talsystemet.

Representation i bas 2:	1	1	1	0	0
Positionsvärde:	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$1 \cdot 2^4$	$+\ 1 \cdot 2^3$	$+\ 1 \cdot 2^2$	$+\ 0 \cdot 2^1$	$+\ 0 \cdot 2^0 = 28$

Ett skrivsätt är att ange talbasen som ett index, så att $28_{10} = 11100_2$. Om index utelämnas så är det bas 10 som gäller.

Vi kan tänka oss konverteringen till bas två som att vi har 28 kronor och växlar detta till mynt med valörerna 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ och $2^4 = 16$. Vi får då 0 eller 1 av varje myntsort och dessa antal utgör siffrorna i den binära representationen av talet. I allmänhet så representeras tal i bas 2 som visas i följande tabell, där s_i är 0 eller 1.

Representation i bas 2:	...	s_3	s_2	s_1	s_0
Positionsvärde:	...	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	...	$+\ s_3 \cdot 2^3$	$+\ s_2 \cdot 2^2$	$+\ s_1 \cdot 2^1$	$+\ s_0 \cdot 2^0$

Exempel 1.4.1. Skriv 19 i bas 2.

Lösningsförslag. Vi börjar med att bestämma den största 2-potens som är mindre än eller lika med 19. Vi ser att $2^5 = 32$ är för stort. Däremot funkar $2^4 = 16$. Eftersom $19 - 16 = 3$ har vi bara tre kvar att konvertera. Detta räcker varken till 2^3 eller 2^2, utan endast till en 2^1 och slutligen en etta, det vill säga 2^0. Vi kan därmed skriva 19 i bas 2 enligt

$$19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10011_2. \qquad \square$$

Att skriva om tal skrivna i bas 2 till bas 10 är lättare, men det är bara för att vi är så vana vid att multiplicera och addera tal representerade i bas 10.

Exempel 1.4.2. Konvertera 110_2 till bas 10.

Lösningsförslag. Vi skriver först om 110_2 i tvåpotenser och beräknar sedan som vanligt.

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6. \qquad \square$$

Övningar 1.4

1. Konvertera 34 till bas 2.
2. Konvertera 1101_2 till bas 10.
3. Beräkna $11011_2 + 101010_2$ i bas 2 utan att byta till bas 10 emellan.
4. Konvertera talet 201_3 till bas 4.
5. *(Svårare)* Beräkna $1002_3 - 234_5$ och ge svaret i bas 8.
6. *(Svårare)* Visa att om ett tal på binär form har lika många ettor på udda position, som ettor på jämn position, då är talet jämnt delbart med 3.

1.5. Rationella tal

Vi har nu bekantat oss med de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$, de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$. Nästa steg på vägen är de *rationella talen*.

Om a och b är två heltal så har ekvationen $a + x = b$ lösningen $x = b - a$. Eftersom heltalen är slutna under subtraktion är denna lösning ett heltal. Men vad händer om vi vill lösa ekvationen

$$a \cdot x = b$$

där a och b är heltal? Är x ett heltal? Givetvis kan x vara ett heltal, exempelvis om $a = 4$ och $b = 12$ så är $x = 12/4 = 3$. Men om $a = 12$ och $b = 4$ så får vi fram x genom att dividera båda leden i ekvationen

$$12 \cdot x = 4$$

med 12, vilket ger

$$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Detta är ett bråktal, eller ett *rationellt tal*. Ett godtyckligt rationellt tal är en lösning till ekvationen $b \cdot x = a$, där a och b är heltal och $b \neq 0$. Detta tal kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$. Talet a i det rationella talet $\frac{a}{b}$ kallas *täljare* och talet b kallas *nämnare*.

Begreppet *rationellt tal* är besläktat med den engelska termen *ratio*, som betyder *förhållande*. Två rationella tal

$$\frac{a}{b} \quad \text{och} \quad \frac{c}{d}$$

är lika om a förhåller sig till b på samma sätt som c förhåller sig till d. Det innebär att

$$\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

eftersom $2a$ förhåller sig till $2b$ på samma sätt som a förhåller sig till b, och i allmänhet att

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b},$$

där c är ett nollskilt heltal. Mängden av rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$, efter det engelska ordet *quotient* (*kvot*). Eftersom varje heltal a kan skrivas som $a/1$ kan mängden av heltal ses som en delmängd till mängden av rationella tal, alltså $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

När vi löste ekvationen $12 \cdot x = 4$ så utnyttjade vi att

$$\frac{4}{12} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vi säger att $1/3$ är skrivet på *förkortad form*. Att vi inte kan förkorta bråket $1/3$ mer beror på att 1 och 3 saknar gemensamma delare (förutom 1). För att hitta den förkortade formen av ett bråk a/b kan vi primtalsfaktorisera både a och b. När vi väl har funnit primtalsfaktoriseringen kan vi förkorta bråket så att täljaren och nämnaren inte längre har gemensamma delare.

Exempel 1.5.1. Förkorta $90/105$.

Lösningsförslag 1. Vi har att $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ och att $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, så

$$\frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}. \qquad \square$$

Ibland kan det vara lätt att se att två bråk har en gemensam delare. I så fall kan vi utföra förkortningen direkt. Låt oss därför titta på ett annat lösningsförslag.

Lösningsförslag 2. Vi ser att både 90 och 105 är delbara med 5, vi har nämligen att $90 = 5 \cdot 18$ och $105 = 5 \cdot 21$, så $90/105 = 18/21$. Vidare har vi att $18 = 3 \cdot 6$ och $21 = 3 \cdot 7$, alltså är

$$\frac{90}{105} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}. \qquad \square$$

Kuriosa. Som nämnts tidigare är primtalsfaktorisering beräkningstungt, så att finna primtalsfaktorerna i täljare och nämnare om dessa är stora tal är inte effektivt. Men för att avgöra om ett bråk är maximalt förkortat finns det en bättre metod, nämligen Euklides algoritm, som vanligen gås igenom i högskolans grundkurser.

Ibland skriver man sneda bråkstreck och ibland raka. Det är ingen skillnad i betydelse, så det gäller att

$$a/b = \frac{a}{b}.$$

Oftast är det tydligare att använda den senare framställningen.

1.5.1. Addition, multiplikation och division av rationella tal

Vi adderar bråk genom att förlänga så att båda bråken får samma nämnare och skriver dem på gemensamt bråkstreck. Det här är ett sätt att göra detta på:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Exempel 1.5.2. Vi har att

$$\frac{3}{4} + \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{4 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-1}{20} = -\frac{1}{20}.$$

Vid addition av bråken a/b och c/d ovan användes den gemensamma nämnaren $b \cdot d$. Om de två första nämnarna b och d har gemensamma faktorer kan man hitta en gemensam nämnare som är mindre än $b \cdot d$. Att använda minsta gemensamma nämnare kan underlätta räkningen avsevärt. Vi visar med ett exempel.

Exempel 1.5.3. Beräkna $\frac{1}{6} + \frac{3}{14}$.

Lösningsförslag. Vi har $6 = 2 \cdot 3$ och $14 = 2 \cdot 7$, så genom att förlänga det första bråket med 7 och det andra med 3 får vi den gemensamma nämnaren 42 (istället för $6 \cdot 14 = 84$). Detta ger oss

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{14} = \frac{7 \cdot 1}{7 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 14} = \frac{7 + 9}{42} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21}.$$

I det sista steget förkortade vi med 2. Svaret bör för det allra mesta ges på maximalt förkortad form. □

I nästa exempel subtraheras ett bråk från summan av två bråk genom att alla tre bråk skrivs om med samma nämnare.

Exempel 1.5.4. Beräkna $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2}$.

Lösningsförslag. Vi har att

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 2 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{14 + 10 - 105}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{-81}{2 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Vi har här behållit faktorerna i nämnaren för att lättare kunna kontrollera om bråket är skrivet på förkortad form eller ej. Eftersom $81 = 9 \cdot 9 = 3^4$ så saknar täljare och nämnare gemensamma delare. Alltså är

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} = -\frac{81}{70}.$$

□

Produkten av två bråktal kan beräknas genom att multiplicera täljare och nämnare för sig:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Men det är alltid lämpligt att först se om det finns någon möjlighet att förkorta i början av räkningen; jämför lösningsförlagen nedan.

Exempel 1.5.5. Beräkna $\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5}$.

Lösningsförslag 1. Vi har att

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-12}{20} = -\frac{12}{20} = -\frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4} \cdot 5} = -\frac{3}{5}. \qquad \square$$

Lösningsförslag 2. Alternativt,

$$\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{-\cancel{4}}{5} = \frac{3 \cdot (-1)}{5} = -\frac{3}{5}. \qquad \square$$

Vid division av bråk sägs det ofta att ”täljaren ska multipliceras med nämnaren inverterad”. Varför det är så kan man visa till exempel genom att först förlänga med bråktalens nämnare och sedan förkorta:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot b \cdot d} = \frac{\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b} \cdot d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot b \cdot \cancel{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Om de två nämnarna b och d har gemensamma delare så kan beräkningarna bli enklare om man bara förlänger så att nämnarna blir den minsta gemensamma multipeln av b och d. I exemplet nedan räcker det att förlänga med 24 (istället för $12 \cdot 8$) för att blir av med ”dubbelbråket”.

Exempel 1.5.6. Vi har att

$$\frac{\frac{-3}{8}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{-3}{8} \cdot 24}{\frac{5}{12} \cdot 24} = \frac{\frac{-3}{8} \cdot 8 \cdot 3}{\frac{5}{12} \cdot 12 \cdot 2} = \frac{-3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = -\frac{9}{10}.$$

Exempel 1.5.7. Beräkna $\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5}$.

Lösningsförslag 1. Vi har

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} - \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{8}{5} = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} - \frac{8}{5} = \frac{5}{8}. \qquad \square$$

Lösningsförslag 2. Alternativt,

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}} + \frac{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}}{2 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 4}{5} = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} - \frac{8}{5} = \frac{5}{8}. \qquad \square$$

Det är bra att vänja sig vid att utföra beräkningar även på det sätt som visas i det andra lösningsförslaget, det går ofta lite smidigare. Är man säker på sin bråkräkning kan man förstås i sin redovisning utelämna stegen där man förlänger.

Exempel 1.5.8. Beräkna $2/(2/3) + (5/4)/2$.

Lösningsförslag 1. Vi har att

$$2/(2/3) + (5/4)/2 = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{1} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}. \qquad \square$$

Lösningsförslag 2. Alternativt,

$$2/(2/3) + (5/4)/2 = \frac{2 \cdot 3}{\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}} + \frac{\frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{1} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}. \qquad \square$$

Att behärska omskrivningar med förlängningar och förkortningar som används vid bråkräkning är viktigt. Samma metoder används även när man hanterar algebraiska uttryck, som till exempel polynom dividerade med varandra, som adderas, multipliceras och divideras.

Avslutningsvis nämner vi att de sex grundläggande sambanden i avsnittet om heltalen även gäller för rationella tal.

1.5.2. Blandad form och decimalform

I skolans matematik är det vanligt att man använder så kallad blandad form, i vilken till exempel två hela och två tredjedelar skrivs $2\frac{2}{3}$. Men detta är mycket snarlikt uttrycket $2 \cdot \frac{2}{3}$ som är något helt annat (nämligen $\frac{4}{3}$). Vi rekommenderar därför att två hela och två tredjedelar skrivs $2 + \frac{2}{3}$ eller ofta ännu hellre att det beräknas till $\frac{8}{3}$.

I denna kurs, liksom i de flesta matematikkurser vid högskolan, är decimalform sällan praktiskt. Bråket $\frac{2}{10}$ förkortar vi till $\frac{1}{5}$ istället för att skriva det som 0.2. Observera dessutom att uttryck som $\frac{1}{3}$ inte ens kan skrivas på exakt decimalform. I många tillämpningar av matematik är det förstås däremot naturligt att använda decimalform och då ange ett lämpligt avrundat närmevärde.

1.5.3. De rationella talens slutenhet

Mängden av alla rationella tal $\mathbb{Q}$ är sluten under addition, subtraktion och multiplikation då alla dessa operationer med alla rationella tal resulterar i nya rationella tal. Kanske tänker du nu att mängden $\mathbb{Q}$ är sluten under division också eftersom vi ovan sett hur division av rationella tal resulterar i rationella tal. Detta skulle betyda att om x och y är två godtyckliga rationella tal så ska x/y också vara ett rationellt tal. Men detta stämmer inte om $y = 0$, för 0 är ju ett rationellt tal men $x/0$ är inte definierat.

För att slutenhet ska gälla vid division måste vi alltså betrakta mängden av rationella tal utan talet 0. Inom denna mängd gäller att division av två godtyckliga element (nollskilda rationella tal) ger oss ett element i samma mängd.

Övningar 1.5

1. Beräkna $1/3 + 1/2 + 1/7$. Svaret ska anges på förkortad form, alltså på formen a/b där a och b saknar gemensamma delare.

2. Beräkna $2 \cdot 1/3 + \dfrac{-2}{\frac{1}{3}} - \dfrac{\frac{8}{3}}{2}$.

3. Beräkna $\dfrac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{3}}$.

4. Representerar $-1/3$ och $\dfrac{1}{-6}\Big/\dfrac{1}{2}$ samma rationella tal?

5. Låt $s = -\dfrac{1}{9}$, $t = -\dfrac{1}{6}$ och $u = \dfrac{3}{2}$. Bestäm

   (a) $s \cdot t + u$,

(b) $\dfrac{s}{t} \Big/ \dfrac{s}{u}$,

(c) $\dfrac{s-t}{t-u}$,

(d) $(s-u) \cdot \dfrac{t}{u+t}$.

6. Visa att $1/11 = 0.09090909\ldots$.

1.6. Reella tal

Att det finns tal som inte är rationella upptäcktes av Pythagoras (500-talet f Kr). För diagonalens längd x i en kvadrat med sidan ett gäller enligt Pythagoras sats att $1^2 + 1^2 = x^2$. Diagonalens längd ska alltså vara en positiv lösning till ekvationen $x^2 = 2$. Som bekant skrivs lösningen $\sqrt{2}$. Detta tal, som per definition är sådant att dess kvadrat är 2, kan omöjligt uttryckas som en kvot av två heltal och är därför ett exempel på ett *irrationellt tal*. Ett annat välkänt exempel på ett irrationellt tal är π, som anger förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diagonal.

Kuriosa. För att visa att $\sqrt{2}$ är irrationellt antar man att $\sqrt{2}$ kan skrivas som ett bråk, det vill säga som a/b, där a och b är heltal. Man visar sedan att detta leder till en motsägelse. Detta bevis utfördes av Aristoteles (300-talet f. Kr.) och är ett utmärkt exempel på ett motsägelsebevis. Beviset är inte komplicerat och brukar ingå i högskolans grundkurser i matematik.

Ett rationellt tal har antingen en ändlig decimalutveckling, till exempel* $1/10 = 0.1$ och $11/8 = 1.375$, eller en oändlig decimalutveckling vilken upprepar sig (åtminstone efter ett tag), till exempel $1/3 = 0.333333\ldots$ och $103/54 = 1.9074074074\ldots$. På motsvarande sätt karakteriseras de irrationella talen av att de har en oändlig decimalutveckling som inte upprepar sig. Ett irrationellt tal kan inte skrivas som en kvot mellan två heltal och vill vi till exempel ange $\sqrt{2}$ och π på decimalform måste vi nöja oss med avrundningar: $\sqrt{2} \approx 1.41421$ och $\pi \approx 3.14159$.

De irrationella talen utgör tillsammans med de rationella talen de *reella talen*. Dessa betecknas med $\mathbb{R}$ och det gäller alltså att $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Även om de rationella talen ligger oändligt tätt längs tallinjen, så finns även ett oändligt antal ”hål” på tallinjen och det är dessa som utgörs av de irrationella talen. Att de rationella talen ligger oändligt tätt ska tolkas som att det mellan varje par av rationella tal alltid finns oändligt många rationella tal. Ändå finns det mellan varje par av rationella tal även oändligt många irrationella tal! För att få med hela tallinjen måste vi alltså ta med både de rationella och de irrationella talen.

Att definiera de reella talen formellt är mycket mer komplicerat än för de rationella talen, vi nöjer oss här med den intuitiva bilden av alla tal på tallinjen.

Även för de reella talen gäller de sex grundläggande sambanden från Avsnitt 1.1.

1.6.1. Mer om potenser

I avsnittet om heltal stötte vi på potensbegreppet. Vi ska nu generalisera detta, men vi måste vara lite försiktiga. Vi kommer att titta på två olika fall.

Fall 1: Potenser r^a där $r \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{Z}$ (till exempel $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ eller 2^{-3}).

Om exponenten $a > 0$ så är

$$r^a = \underbrace{r \cdots r}_{a \text{ gånger}},$$

*Vi håller oss till den amerikanska standarden och skriver 0.1 istället för den svenska standarden $0,1$. Detta bland annat för att vi vill använda kommatecken för att separera tal i listor eller mängder.

precis som när basen är ett heltal. För specialfallet då basen är ett rationellt tal, $r = \frac{p}{q}$, innebär det att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p}{q} \cdot \dots \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^a}{q^a}.$$

Om exponenten är lika med noll och basen r är nollskild definieras

$$r^0 = 1.$$

Observera alltså att $4^0 = (-13)^0 = (\sqrt{2})^0 = (\frac{1}{4})^0 = 1$, men att 0^0 inte är definierat.

Om $a < 0$ och $r \neq 0$ definieras

$$r^a = \frac{1}{r^{-a}}.$$

Fall 2: Potenser r^a där $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0,\ a \in \mathbb{Q}$ (till exempel $2^{1/2}$ eller $\pi^{\frac{7}{3}}$).

Talet $r^{1/2}$ definieras som det icke-negativa tal vars kvadrat är lika med r. Detta är helt enkelt kvadratroten av r, det vill säga $r^{1/2} = \sqrt{r}$. På liknande sätt definieras $r^{1/n}$ som det icke-negativa tal vilket upphöjt till n är lika med r, alltså så att

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\right)^n = r.$$

Istället för $r^{1/n}$ skriver man ibland $\sqrt[n]{r}$, vilket läses "n:te-roten av r".

En potens med en allmän rationell exponent $a = \frac{p}{q}$ definieras enligt

$$r^{\frac{p}{q}} = (r^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Det är viktigt att det tal r vi tar n:te-roten av alltid är icke-negativt och att n:te-roten $\sqrt[n]{r}$ också alltid är icke-negativt. Alltså gäller att talet $\sqrt{4}$ är lika med 2 och inget annat. Notera dock att ekvationen $x^2 = 4$ har de två lösningarna $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Med definitionerna ovan gäller räknereglerna

$$r^a \cdot r^b = r^{a+b}, \quad (r^a)^b = r^{a \cdot b} \quad \text{och} \quad (r \cdot t)^a = r^a \cdot t^a,$$

vilka vi tidigare såg för potenser i avsnittet om heltal. Ett specialfall av den sista likheten är omskrivningen $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, dock krävs det att både x och y är icke-negativa tal för att det högra ledet ska vara definierat.

Vi har inte alls sagt något om vad som gäller för potenser med en irrationell exponent. Vi nöjer oss med att konstatera att även dessa kan definieras och att de kommer uppfylla samma räkneregler.[†]

Tycker du detta verkade svårt? Ta en ordentlig titt på exemplen, som vart och ett illustrerar olika aspekter, så kommer du förstå det väsentliga.

Exempel 1.6.1. Vi har följande exempel på förenklingar:

(a) $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2,$

(b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$

(c) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2, \quad 27^{1/3} = \left(3^3\right)^{1/3} = 3^{3 \cdot (1/3)} = 3^1 = 3, \quad \left(2^{10}\right)^{1/10} = 2.$

Exempel 1.6.2. Förenkla $4^{3/2}$.

Lösningsförslag 1. Vi använder definitionen och skriver $4^{3/2} = \left(4^3\right)^{1/2} = \sqrt{4^3}$. Vi fortsätter och får $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. □

[†]Eftersom vi inte gett någon strikt definition för reella tal kan vi inte heller här definiera potenser med reella exponenter.

Lösningsförslag 2. Man kan också utnyttja potenslagen $(r^a)^b = r^{ab}$ och omskrivningen $4 = 2^2$ för att få

$$4^{3/2} = \left(2^2\right)^{3/2} = 2^{2\cdot 3/2} = 2^3 = 8. \qquad \square$$

För att se fördelen med det senare sättet, betrakta $128^{4/7}$. Att beräkna 128^4 och sedan försöka finna sjunderoten av det talet är givetvis inte att föredra framför omskrivningen $128 = 2^7$ och beräkningen $2^{7\cdot 4/7} = 2^4 = 16$.

Det är bra att vara bekväm med olika sätt att skriva om och beräkna potenser; i nästa exempel ges tre lösningsförslag.

Exempel 1.6.3. Förenkla $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Lösningsförslag 1. $\sqrt{2}^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}^{2/3}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}^2\right)^{1/3}} = \dfrac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}$. $\square$

Lösningsförslag 2. $\sqrt{2}^{-2/3} = (2)^{-1/3} = 2^{-1/3}$. $\square$

Lösningsförslag 3. $\sqrt{2}^{-2/3} = \left(2^{1/2}\right)^{-2/3} = 2^{(1/2)\cdot(-2/3)} = 2^{-1/3}$. $\square$

Exempel 1.6.4. Skriv

$$\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot\sqrt{27}}{9^3\cdot(-3)^3\cdot 3^{-1/3}}$$

på formen $-3^{a/b}$, där a/b är ett maximalt förkortat bråk.

Lösningsförslag. Det finns olika vägar att skriva om och förenkla uttrycket. Vi väljer att börja med att se till att alla faktorer i täljaren och i nämnaren är potenser av 3.

$$\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot\sqrt{27}}{9^3\cdot(-3)^3\cdot 3^{-1/3}} = \frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot\left(3^3\right)^{1/2}}{\left(3^2\right)^3\cdot(-1)^3\cdot 3^3\cdot 3^{-1/3}} = -\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{3/2}}{3^6\cdot 3^3\cdot 3^{-1/3}}.$$

Här kan vi till exempel först hantera potenser med heltalsexponenter för sig och de med rationella exponenter för sig:

$$-\frac{3^{1/3}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{3/2}}{3^6\cdot 3^3\cdot 3^{-1/3}} = -3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\cdot 3^{-2-6-3}\cdot 3^{\frac{2}{3}} = -3^{\frac{2}{3}-11+\frac{3}{2}} = -3^{\frac{4-66+9}{6}} = -3^{-53/6}. \qquad \square$$

För exponenter som inte är heltal har vi inte definierat potenser med negativ bas, så som till exempel $(-1)^{1/2}$. Sådana potenser är problematiska och möjliga definitioner återkommer först i senare högskolekurser (på bekostnad att räknereglerna inte längre är lika enkla). Även om vi inte här kommer till kvadratrötter ur negativa tal så ska vi nu gå vidare och se hur de reella talen utvidgas till de komplexa talen genom att man inför den imaginära enheten som det tal vars kvadrat är -1.

Övningar 1.6

1. Beräkna 2^6, $4^{3/2}$ samt $8^{1/3}$.
2. Beräkna $\sqrt{(-5)^2}$.
3. Beräkna $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ samt $9^{-1/2}$.
4. Beräkna $\sqrt{3}^4 + \left(3^{1/3}\right)^{-3}$.

5. Beräkna $81^{3/4}$.

6. Beräkna $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$.

7. Skriv
$$\frac{2^{-1/3} \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{64}}{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1/8}}$$
på formen $2^{a/b}$, där a/b är ett maximalt förkortat bråk.

8. *(Svårare)* Visa att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

1.7. Komplexa tal

Man kan tycka att de reella talen, $\mathbb{R}$, är alla tal man någonsin skulle behöva. Men på 1500-talet insåg man att man hade nytta av att införa ett nytt slags tal för att kunna lösa vissa ekvationer, detta var de *komplexa talen*.

Vi såg tidigare att för att lösa ekvationen $x^2 = 2$ räcker inte de rationella talen. Bland de reella talen finns det däremot två lösningar, vilka betecknas $\pm\sqrt{2}$. Låt oss nu fundera på ekvationen $x^2 = -1$. Eftersom kvadraten på varje reellt tal (utom noll) är positiv finns inga reella lösningar. Så om det ska finnas någon lösning måste det vara ett slags nytt tal. Detta tal kallas för *imaginära enheten* och betecknas i. Det som definierar talet i är helt enkelt att det är en lösning till ekvationen $x^2 = -1$, det vill säga att

$$i^2 = -1.$$

Ibland skriver man $i = \sqrt{-1}$, men detta kan leda till problem, så det bör undvikas. Notera till exempel följande ”räkning”: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \text{ ”=” } \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$. Eftersom $1 \neq -1$ så är något uppenbarligen fel! Problemet är att räkneregeln $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ inte gäller då a och b är negativa.

Utifrån imaginära enheten i tillsammans med multiplikation och addition med reella tal får vi *komplexa tal*. Dessa tal kan uttryckas på formen $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Talet a kallas för *realdelen* och talet b för *imaginärdelen* av talet z och vi skriver $\mathrm{Re}(z) = a$ samt $\mathrm{Im}(z) = b$. Observera att det som kallas imaginärdelen är det reella talet b och inte det imaginära talet bi.

Exempel 1.7.1. Låt $z = \frac{1}{4} + 5i$. Då är $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{4}$ och $\mathrm{Im}(z) = 5$.

Att införa i som lösning till $x^2 = -1$ ger mycket mer än bara en lösning till denna ekvation. Vi ska senare se att vi med de komplexa talen kan finna lösningar till alla andragradsekvationer. I själva verket ger det oss lösningar till alla polynomekvationer och det har visat sig att det finns många sammanhang där det är användbart att räkna med komplexa tal.

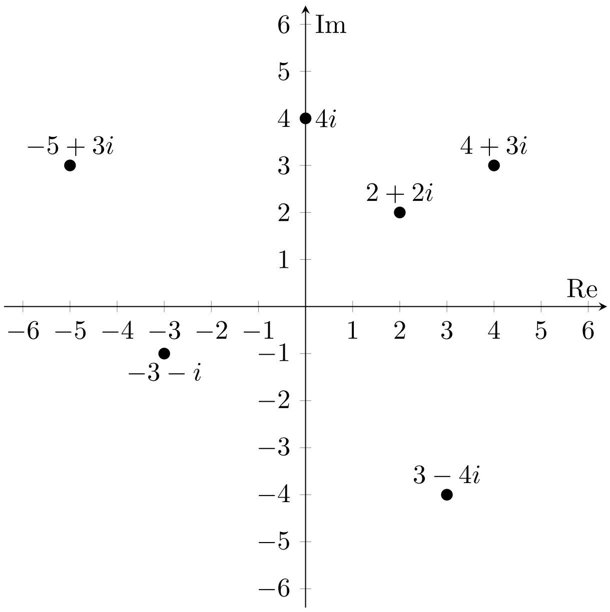
Varje komplext tal $a+bi$ svarar mot ett par (a, b) av reella tal. De reella talen kan representeras på en tallinje, medan de komplexa talen kan representeras i ett talplan. I det *komplexa talplanet* ger realdelen x-koordinaten och imaginärdelen y-koordinaten.

Mängden av alla komplexa tal skrivs $\mathbb{C}$. De komplexa tal vars imaginärdel är 0 sammanfaller med de reella talen, $\mathbb{R}$, vilka alltså är en delmängd av de komplexa talen. Vi har nu kommit fram till följande kedja av delmängder:

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

När man adderar komplexa tal så adderar man realdelarna och imaginärdelarna för sig,

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$



Figur 2: Det komplexa talplanet med några exempel på komplexa tal markerade.

där a_1, a_2, b_1, b_2 är reella tal. Subtraktion behandlas på liknande sätt och vi har

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

När vi ska multiplicera två komplexa tal $a_1 + b_1 i$ och $a_2 + b_2 i$ får vi

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

genom att först multiplicera ihop parenteserna ”som vanligt” enligt den distributiva lagen och sedan använda sambandet $i^2 = -1$. (Vi har även antagit att i kommuterar med reella tal.) Detta är inte en formel man bör lära sig utantill, det är bättre att utföra multiplikationen enligt stegen ovan varje gång man behöver.

Hur man dividerar med komplexa tal tar vi upp först i nästa avsnitt.

Exempel 1.7.2. Låt $z = 1 - 2i$ och $w = 3 + 4i$. Beräkna $z + w$, $z - w$ och $z \cdot w$.

Lösningsförslag. Additionen och subtraktionen ger

$$z + w = (1 - 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 - 2i + 4i = 4 + 2i$$

respektive

$$z - w = (1 - 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 - 2i - 4i = -2 - 6i.$$

Vi utför multiplikationen och får

$$z \cdot w = (1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot 4i = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i.$$

Alltså har vi att $z + w = 4 + 2i$, $z - w = -2 - 6i$ och $z \cdot w = 11 - 2i$. □

Avslutningsvis nämner vi att våra sex grundläggande samband i avsnittet om heltalen gäller även för de komplexa talen. Vi har alltså att för komplexa tal z, w och v gäller följande

$z + w = w + z$	kommutativa lagen för addition,
$(z + w) + v = z + (w + v)$	associativa lagen för addition,
$-(-z) = z$	negeringslagen,
$z \cdot w = w \cdot z$	kommutativa lagen för multiplikation,
$(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$	associativa lagen för multiplikation,
$z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$	distributiva lagen.

Exempel 1.7.3. Beräkna $(2i)^3$.

Lösningsförslag. Vi har att $(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3$ som blir $8i^3$. Vidare är $i^3 = i^2 \cdot i$ och $i^2 = -1$, så $i^3 = -i$. Alltså är $8i^3 = -8i$. □

Övningar 1.7

1. Beräkna $(2 - i) + (3 + 4i)$.
2. Beräkna $2i \cdot (2 - 2i)$.
3. Beräkna $(1 + 2i)(2 - \frac{i}{4})$.
4. Beräkna $(3 - 2i)(4 + i - (6 - 2i))$.
5. Låt $z = 2 + \frac{i}{2}$ och $w = 1 - i$. Beräkna värdet på uttrycken
$$z + w, \quad z - w, \quad z \cdot w, \quad \text{och} \quad \frac{z}{w}.$$
Markera därefter z, w och alla beräknade värden i det komplexa talplanet.
6. Beräkna i^{10}, i^{11}, i^{12} och i^{1024}. Fundera sedan på vilka värden i^n kan anta om n är ett heltal.
7. Bestäm realdelen och imaginärdelen av $z = (1 + i)^3$.
8. *(Svårare)* Antag att vi definierar en sekvens av komplexa tal genom $z_1 = 0$ och $z_{n+1} = z_n^2 + i$ för $n \geq 1$. Hur långt från origo kommer då z_{111} att befinna sig?

1.8. Kvadreringsreglerna och konjugatregeln

Genom att använda den distributiva lagen och den kommutativa lagen för multiplikation ska vi härleda *kvadreringsreglerna* och *konjugatregeln*. Eftersom den kommutativa och den distributiva lagen gäller för alla de talmängder vi berör i detta material så kommer dessa regler att gälla för alla dessa talmängder.

1.8.1. Kvadreringsreglerna

Vi påminner oss först om att
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Genom att betrakta specialfallet $a = c$ och $b = d$ får vi kvadreringsregeln
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ibland kallas denna regel istället *första kvadreringsregeln* och då vi byter ut b mot $-b$ får vi det som då kallas *andra kvadreringsregeln*, alltså

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Att gå från vänsterled till högerled brukar ofta vara lätt, men det är minst lika viktigt att kunna göra omskrivningar från högerled till vänsterled.

Exempel 1.8.1. Faktorisera uttrycket $x^2 - 2x + 1$.

Lösningsförslag. Här kan vi direkt använda andra kvadreringsregeln "baklänges" (med $a = x$ och $b = 1$). Vi får

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2. \qquad \square$$

Exempel 1.8.2. Faktorisera uttrycket $x^3 + 4x^2 + 4x$.

Lösningsförslag. Vi börjar med att bryta ut x eftersom x finns i alla termer i uttrycket,

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4).$$

Nu kan vi använda första kvadreringsregeln "baklänges", vilket ger

$$x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2. \qquad \square$$

Exempel 1.8.3. Ett fiffigt sätt att beräkna kvadraten av vissa tal är att skriva om talet som summan (eller skillnaden) av två tal vars kvadrater är lätta att beräkna. Vi illustrerar med att beräkna kvadraten 101^2. Med omskrivningen $101^2 = (100+1)^2$ ger kvadreringsregeln

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$$

1.8.2. Konjugatregeln

Ett annat specialfall är då man multiplicerar summan av två tal med deras differens. Det ger konjugatregeln

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Exempel 1.8.4. Skriv om uttrycket $(2x+y)(2x-y)$ med hjälp av konjugatregeln.

Lösningsförslag. Vi tillämpar konjugatregeln och får

$$(2x+y)(2x-y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2. \qquad \square$$

Sammanfattningsvis har vi följande räkneregler:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(första kvadreringsregeln)} \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{(andra kvadreringsregeln)} \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(konjugatregeln)}
\end{aligned}$$

Exempel 1.8.5. Förkorta uttrycket

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1}$$

så långt som möjligt.

Lösningsförslag. För att kunna förkorta måste vi först faktorisera täljaren och nämnaren. Alla termer i täljaren innehåller x, så vi kan börja med att bryta ut x i täljaren. Vi får

$$\frac{4x^3+4x^2+x}{4x^2-1} = \frac{x(4x^2+4x+1)}{4x^2-1}.$$

Första kvadreringsregeln kan användas i täljaren och konjugatregeln kan användas i nämnaren så att

$$\frac{x(4x^2+4x+1)}{4x^2-1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)}.$$

Här ser vi att det går att förkorta med $(2x+1)$ eftersom det är en faktor som finns både i täljaren och i nämnaren. Detta ger oss

$$\frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x(2x+1)}{2x-1}.$$

Hur vet vi då att vi är klara? Jo, både täljare och nämnare är faktoriserade så långt som möjligt och vi kan inte hitta några fler gemensamma faktorer. □

1.8.3. Förenkling av bråk där täljare och nämnare är komplexa tal

En tillämpning av konjugatregeln är att skriva om bråk av komplexa tal. För $z = x+iy$ definierar vi *komplexkonjugatet* $\bar{z}$, eller ibland kallat endast *konjugatet*, till z som

$$\bar{z} = x - iy.$$

Låt oss med konjugatregeln beräkna multiplikationen av ett komplex tal med dess konjugat.

Exempel 1.8.6. Låt $z = 4+i$. Då är $\bar{z} = 4-i$ och $z \cdot \bar{z} = (4+i)\cdot(4-i) = 4^2 - i^2 = 4^2 + 1^2 = 17$.

Notera att resultatet blev ett reellt tal—detta eftersom imaginära enheten i endast kommer med i kvadrat. Mer allmänt gäller

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2-(i)^2b^2 = a^2-(-1)b^2 = a^2+b^2.$$

Produkten av de två komplexa talen z och $\bar{z}$ är alltså alltid ett positivt *reellt* tal. Enligt Pythagoras sats motsvarar $\sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ avståndet mellan talet z och origo i det komplexa talplanet.

Låt nu $z = a+bi$ vara ett nollskilt komplext tal. Vi ska visa hur man kan skriva om $1/z$ på formen $c+di$, där c och d är reella tal. Idén är att förlänga bråket $1/z$ med konjugatet till z för att få en reell nämnare.

$$\frac{1}{z} = \frac{1\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{a-bi}{(a^2+b^2)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

Vi har alltså lyckats skriva $1/z$ på formen $c+di$ där $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ och $d = -\frac{b}{a^2+b^2}$ är reella tal.

Exempel 1.8.7. Skriv $\dfrac{1}{2+3i}$ på formen $a+bi$, där a och b är reella tal.

Lösningsförslag. Konjugatet till $2+3i$ är $2-3i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\,i.$$ □

Nästa exempel visar hur vi med samma metod kan skriva om det tal man får från division av ett komplext tal med ett annat på formen $a+bi$.

Exempel 1.8.8. Skriv $\dfrac{4+i}{1+\sqrt{2}i}$ på formen $a+bi$.

Lösningsförslag. Konjugatet till nämnaren $1+\sqrt{2}i$ är $1-\sqrt{2}i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och förenklar. Det ger

$$\frac{4+i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{(4+i)\left(1-\sqrt{2}i\right)}{\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)} = \frac{4+i-4\sqrt{2}i-\sqrt{2}i^2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$$

Ytterligare förenklingar ger

$$\frac{4+i-4\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{1-(-2)} = \frac{4+\sqrt{2}+\left(1-4\sqrt{2}\right)i}{3} = \frac{4+\sqrt{2}}{3} + \frac{1-4\sqrt{2}}{3}i. \qquad \square$$

Detta illustrerar inte bara hur division med komplexa tal hanteras. Eftersom samma metod för division av ett komplext tal med ett annat nollskilt komplext tal alltid ger ett nytt komplext tal framgår det också att mängden av de komplexa talen förutom talet 0 är slutna under division.

Övningar 1.8

1. Beräkna $1002 \cdot 998$ med hjälp av konjugatregeln.
2. Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.
   (a) $\dfrac{x+x^2+xy}{1+x+y}$
   (b) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$
   (c) $\dfrac{25-x^2}{x-5}$
   (d) $\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$.
3. Låt $z = 3+4i$. Beräkna $z \cdot \bar{z}$.
4. Skriv om $\dfrac{1}{2+3i}$ på formen $a+bi$, där a och b är reella tal.
5. Skriv $\dfrac{4+i}{1-i}$ på formen $a+bi$.
6. Förenkla $\dfrac{4+6i}{2i}$.
7. Faktorisera uttrycken x^2+1 och x^2+y^2. Använd komplexa tal.
8. Låt $z = a+bi$ och $w = c+di$ vara godtyckliga komplexa tal. Avgör vilka av följande påståenden som stämmer:
   (a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$
   (b) $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\bar{z})$
   (c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$
   (d) $\bar{z}+\bar{w} = \overline{z+w}$
   (e) $\bar{z}+\bar{w} = 2\,\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Re}(w) - z - w$

Kapitel 2
Algebra, kombinatorik och logik

Första delen av detta kapitel behandlar polynom, där vi bland annat noggrant går igenom hur polynomekvationer av grad två kan lösas. Via divisionsalgoritmen för polynom når vi fram till den grundläggande faktorsatsen.

Kapitlet omfattar även ett avsnitt om så kallade kombinatoriska problem, samt ett kortare avsnitt om mängder och om logiskt resonemang.

2.1. Polynom och polynomekvationer

Ett *linjärt uttryck* i variabeln x kan skrivas på formen $ax + b$ där a och b är konstanter och $a \neq 0$. Då förekommer x med exponent 1 men inte med någon högre exponent och uttrycket kallas ett förstagradsuttryck.

En *förstagradsekvation*, oftast benämnd en *linjär ekvation*, för variabeln x är en ekvation som kan skrivas på formen $ax + b = 0$ där a är nollskilt. Till exempel är ekvationen $4x - 2 = x + 7$ en linjär ekvation, eftersom vi kan subtrahera $x + 7$ från båda leden och få $3x - 9 = 0$. Lösningen till en förstagradsekvation $ax + b = 0$ är $x = -b/a$ vilket vi får efter att ha subtraherat b från ekvationens båda led och sedan dividerat båda leden med a. Lösningen till ekvationen

$$3x - 9 = 0$$

är alltså $x = 9/3 = 3$.

Vi kan verifiera att detta svar är korrekt genom att testa om $x = 3$ uppfyller den ursprungliga ekvationen $4x - 2 = x + 7$. Detta görs genom att sätta in $x = 3$ dels i vänsterled och dels i högerled *var för sig* och sedan kontrollera att det blir samma tal. I vårt fall blir vänsterledet $4 \cdot 3 - 2 = 10$ och högerledet $3 + 7 = 10$, så lösningen är korrekt. Ta för vana att kontrollera med insättning att du fått rätt lösning.

En *andragradsekvation* har den allmänna formen $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är konstanter och $a \neq 0$. På liknande sätt har en *tredjegradsekvation* den allmänna formen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, där a, b, c och d är konstanter och $a \neq 0$. Innan vi diskuterar lösningar till dessa, samt ekvationer av högre grad introducerar vi begreppet *polynom*.

2.1.1. Polynom

Ett *polynom* $p(x)$ av *grad* n i en variabel x är ett uttryck som kan skrivas på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_n \neq 0$ och där n är ett naturligt tal. Polynomets *koefficienter* är konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Dessa är tal, de kan vara reella tal, komplexa tal eller bara heltal — vilket man nu bestämmer sig för. Man kan givetvis döpa variabeln till något annat än x.

Exempel 2.1.1. Polynomet $p(x) = 2x^5 - 1$ är av grad fem med heltalskoefficienter $a_5 = 2$, $a_0 = -1$ och $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$. Uttrycket $q(x) = \sqrt{2}$ är ett polynom av grad noll med reella koefficienter.

Multiplicerar man ett nollskilt polynom i x av grad n med ett annat nollskilt polynom i x av grad m så kommer det resulterande polynomet att ha grad $m + n$.

Exempel 2.1.2. Polynomet $(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1)$ har grad fem eftersom $3 + 2 = 5$. Låt oss verifiera detta genom att utföra multiplikationen.

$$\begin{aligned}(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1) &= x^3 \cdot (x^2 + x + 1) + x \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x,\end{aligned}$$

vilket mycket riktigt är ett polynom av grad fem.

Kuriosa. Det är frestande att tro att polynomet $p(x) = 0$ har grad noll, men ett polynom som har grad noll måste enligt definitionen ha en nollskild konstantterm. Graden för nollpolynomet är därför odefinierat. I högre matematik låter man vanligtvis nollpolynomet få graden $-\infty$ (”negativ oändlighet”) då denna konvention gör att räkneregler för polynoms grad blir konsekventa.

Vad händer då med graden vid addition eller subtraktion av två polynom? Graden av summan eller differensen av två polynom kan aldrig bli större än graden av det polynom som har högst grad. Men vad gradtalet blir beror faktiskt på hur koefficienterna ser ut. Om högstagradskoefficienterna tar ut varandra så minskar onekligen det resulterande polynomets grad.

Exempel 2.1.3. Polynomet

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (8x^4 - 7x^3 - x) = 5x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

har grad 5, polynomet

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (-5x^5 + x^2) = 3x^2 + 1$$

har grad 2 och polynomet

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) - (5x^5 + 2x^2) = 1$$

har grad 0.

En *polynomekvation* är helt enkelt en ekvation som kan skrivas på formen $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom. Ekvationen är en n:te-gradsekvation om polynomet har grad n. Vi ska noggrant gå igenom hur man löser andragradsekvationer med reella koefficienter för att senare diskutera lösningar till polynomekvationer av högre grad. Ofta kallas lösningarna till en polynomekvation för *rötter* och vi kommer bland annat se hur många rötter en polynomekvation kan ha.

Notera att även lösningar till andra typer av ekvationer ibland kallas rötter, men det är vanligare just för polynomekvationer. Ibland används en något annorlunda terminologi, enligt vilken ett polynom $p(x)$ sägs ha rötter. Det som då menas är polynomets nollställen, det vill säga lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$.

2.1.2. Lösningen till en andragradsekvation med reella koefficienter

I detta avsnitt ska vi finna en metod för att lösa allmänna andragradsekvationer med reella koefficienter genom att använda så kallad *kvadratkomplettering*. Vi börjar med att betrakta ett specialfall, nämligen ekvationen

$$x^2 - a = 0,$$

vilken inte innehåller någon förstagradsterm. Vi skriver om ekvationen till

$$x^2 = a.$$

Om $a > 0$ är lösningarna till ekvationen $x^2 = a$ lika med $x = \sqrt{a}$ och $x = -\sqrt{a}$, eftersom $\sqrt{a}^2 = a$ och $(-\sqrt{a})^2 = a$. När $a = 0$ har vi bara lösningen $x = 0$.

Exempel 2.1.4. Ekvationen $x^2 - 16 = 0$ kan skrivas som $x^2 = 16$ och har därför lösningarna $x = \sqrt{16} = 4$ och $x = -\sqrt{16} = -4$.

Om $a = -1$ får vi ekvationen $x^2 = -1$, som vi löste i Avsnitt 1.7 genom att införa den imaginära enheten i. Lösningarna för denna ekvation är då i och $-i$. För godtyckligt negativt a, så ges lösningarna till $x^2 = a$ av $x_1 = i\sqrt{-a}$ och $x_2 = -i\sqrt{-a}$. Detta kontrolleras lätt genom att sätta in dessa värden istället för x i ekvationen:

$$\left(i\sqrt{-a}\right)^2 = i^2 \cdot \sqrt{-a}^2 = -1 \cdot (-a) = a$$

och

$$\left(-i\sqrt{-a}\right)^2 = (-i)^2 \cdot \left(\sqrt{-a}\right)^2 = -1 \cdot (-a) = a.$$

Notera att om $a < 0$ så är $-a$ ett positivt tal, så det som står innanför rottecknet är positivt.

Exempel 2.1.5. Ekvationen $x^2 + 5 = 0$ kan skrivas som $x^2 = -5$. Lösningarna är $x_1 = i\sqrt{5}$ och $x_2 = -i\sqrt{5}$.

Nu ska vi använda denna insikt till att lösa mer allmänna andragradsekvationer. Knepet är att skriva om en ekvation $ax^2 + bx + c = 0$ så att den liknar de vi just löst, nämligen något med en kvadrat i ena ledet och en konstant i det andra. Säg till exempel att vi vill lösa ekvationen

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Vi börjar med att addera 3 till båda led av ekvationen och får

$$x^2 + 2x = 3.$$

Genom att lägga till en lämplig konstant ska vi skriva om hela vänsterledet som en kvadrat. Notera att kvadraten $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ger oss termerna x^2 och $2x$, vilket är de x^2- och x-termer som vi har i ekvationen. Denna kvadrat ger även konstanten 1, så vi väljer att lägga till 1 i båda led i ekvationen:

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1.$$

Vänsterledet är nu *kvadratkompletterat* och ekvationen kan skrivas

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Vi har här lyckats återföra vår ursprungliga ekvation på en form som liknar de vi löste ovan. I vänsterledet har vi ett uttryck vars kvadrat är 4. De tal vars kvadrat är 4 är talen $-\sqrt{4}$ och $\sqrt{4}$. Alltså har vi att

$$(x + 1) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{eller} \quad (x + 1) = -\sqrt{4} = -2,$$

vilket mer kortfattat kan skrivas $(x + 1) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Slutligen subtraherar vi 1 från båda led och får

$$x = 2 - 1 = 1 \quad \text{eller} \quad x = -2 - 1 = -3.$$

Detta är ekvationens två lösningar. Kontrollera rötterna genom insättning.

Då tar vi itu med det allmänna fallet: att lösa en andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$ med reella koefficienter där $a \neq 0$. Eftersom a är skilt från noll kan vi dela ekvationens båda led med a. Det gäller alltså att lösningarna till ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

är desamma som lösningarna till ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

När vi ska lösa en andragradsekvation räcker det därför att hitta en metod för att lösa ekvationer av typen

$$x^2 + px + q = 0.$$

Denna löser vi på samma sätt som i det exempel vi just gick igenom. Vi subtraherar först q från båda led och får att

$$x^2 + px = -q.$$

Vi försöker nu samla $x^2 + px$ i en kvadrat. Notera att kvadraten $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ stämmer överens med vänsterledet $x^2 + px$ så när som på konstanttermen $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

För att kompensera konstanttermen adderar vi denna till båda led av ekvationen. Med denna *komplettering av kvadraten* får vi

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

där vänsterledet kan skrivas som en kvadrat enligt

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Därmed har vi något i kvadrat som ska vara lika med talet i högerled.

Om högerledet är större än eller lika med noll, det vill säga om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, är denna ekvation uppfylld precis då

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Genom att subtrahera $\frac{p}{2}$ från båda led får vi de reella lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Denna formel brukar kallas *pq-formeln*.

Om högerledet däremot är negativt, det vill säga om $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$, är ekvationen uppfylld precis då

$$x + \frac{p}{2} = \pm i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Genom att subtrahera $\frac{p}{2}$ från båda led får vi de komplexa lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Det är inte rekommenderat att lära sig dessa formler utantill. I några av exemplen som följer ges lösningsförslag där pq-formeln används för att läsaren ska känna igen sig från gymnasiestudierna, men läsarens fokus bör vara på att förstå lösningsförslagen där x löses ut med hjälp av kvadratkomplettering. Metoden att kvadratkomplettera ett andragradsuttryck är användbar även i andra sammanhang.

Exempel 2.1.6. Lös andragradsekvationen $x^2 + x - 2 = 0$ med hjälp av pq-formeln och sedan med hjälp av kvadratkomplettering. Kontrollera lösningarna genom insättning.

Lösningsförslag 1. Vi sätter in $p = 1$ och $q = -2$ i pq-formeln och får att

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

vilket ger rötterna $x = 1$ och $x = -2$.

Vi kontrollerar att vi har räknat rätt genom insättning: $x = 1$ ger $VL = 1^2 + 1 - 2 = 0 = HL$ och $x = -2$ ger $VL = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0 = HL$, där VL och HL betecknar vänster resp. högerled. $\square$

Lösningsförslag 2. Vi skriver om ekvationen som

$$x^2 + x = 2.$$

$x^2 + x$ kan vi samla i kvadraten $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$, där $\frac{1}{2}$ i parentesen är vald som halva koefficienten framför x-termen. Genom att lägga till $\frac{1}{4}$ till ekvationens båda led får vi

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

vilket kan skrivas

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

De tal vars kvadrat är lika med $\frac{9}{4}$ är $\pm\frac{3}{2}$, alltså är

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$$

eller

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Lösningarna till vår ekvation är alltså $x = 1$ och $x = -2$, vilket stämmer med resultatet vi fick ovan. □

I nästa exempel ger vi tre olika lösningar.

Exempel 2.1.7. Lös ekvationen $3x^2 - 5x = 0$.

Lösningsförslag 1. Först dividerar vi hela ekvationen med 3 och får $x^2 - (5/3)x = 0$ som vi löser med pq-formeln (observera att $q = 0$):

$$x = \frac{5/3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5/3}{2}\right)^2} = \frac{5/3}{2} \pm \frac{5/3}{2}.$$

Alltså är $x = 5/3$ och $x = 0$ ekvationens lösningar. (Lösningarna kontrolleras lämpligen genom insättning i den ursprungliga ekvationen.) □

Lösningsförslag 2. Vi delar ekvationens båda led med 3 och får $x^2 - \frac{5}{3}x = 0$. Termerna $x^2 - \frac{5}{3}x$ i vänsterledet kan samlas i kvadraten $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$. Därför adderar vi $\frac{25}{36}$ till båda led och får

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{25}{36},$$

som ger att

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

De tal vars kvadrat är $\frac{25}{36}$ är $\pm\frac{5}{6}$. Lösningarna är därför $\frac{5}{6} \pm \frac{5}{6}$, alltså $x = \frac{5}{3}$ och $x = 0$. □

Lösningsförslag 3. Det finns ett annat mycket smidigare sätt att lösa ekvationen $3x^2 - 5x = 0$. Notera att det inte finns någon konstantterm i ekvationen. Det gör att vi kan faktorisera vänsterledet enligt $3x^2 - 5x = x(3x - 5)$. Om detta uttryck ska vara lika med noll så måste antingen x vara noll eller så måste $(3x - 5)$ vara noll. Alltså är lösningarna $x = 0$ och $x = \frac{5}{3}$. (Vi ska se mer om faktorisering i nästa avsnitt.) □

Exempel 2.1.8. Lös ekvationen $x^2 + x + 1 = 0$.

Lösningsförslag 1. Vi skriver om ekvationen som $x^2 + x = -1$ och sedan som

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}$$

via kvadratkomplettering, det vill säga

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

De tal vars kvadrat är $-3/4$ är $i\sqrt{3}/2$ och $-i\sqrt{3}/2$. Det gäller alltså att

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Lösningarna blir $x = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ och $x = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. $\square$

Lösningsförslag 2. Om vi försöker använda *pq*-formeln får vi det felaktiga uttrycket

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}, \qquad \text{[ej korrekt]}.$$

Detta är omöjligt eftersom vi inte kan ta kvadratroten av ett negativt tal. Då måste vi dra oss till minnes att formeln är lite annorlunda i det fall att lösningarna inte blir reella. Byter man tecken "inne i" kvadratroten och multiplicerar denna med i så blir det korrekt. Lösningarna är

$$x = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$

En förstagradsekvation har exakt en lösning, medan en andragradsekvation har som mest två lösningar. Ibland kan en andragradsekvation ha endast en lösning—till exempel har $x^2 = 0$ bara lösningen $x = 0$. Som vi har sett finns det andragradsekvationer som saknar reella lösningar, till exempel $x^2 + 1 = 0$ eller $x^2 + x + 1 = 0$ från exemplet ovan, men då finns alltid två komplexa lösningar vilka är varandras komplexkonjugat. I allmänhet gäller det att en n:te-gradsekvation har som mest n lösningar.

Kuriosa. Det finns lösningsformler även för polynomekvationer av grad tre och fyra, men de är komplicerade. För godtyckliga polynomekvationer av grad fem eller högre saknas lösningsformler som bara innehåller de fyra räknesätten och roturdragningar. Detta visades av norrmannen Niels Henrik Abel (1802–1829).

Vi återkommer strax till polynom och polynomekvationer av högre grad, men först ska vi ta en titt på division av polynom.

Övningar 2.1

1. Är 3 ett polynom?
2. Finn lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$, där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$
   (b) $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$
   (c) $p(x) = (3 - x)(4 + x)$
3. Hur många reella rötter har följande polynom?
   (a) $3x + 2$

(b) $x^2 - 2x - 3$

(c) $x^2 + 4x + 5$

4. Ordna polynomen efter deras grad, från högst till lägst:

   (a) $p(x) = x^2(3x + 5) + (x^2 + x + 1)$

   (b) $p(x) = (x^2 - 2x)^2 - (x^4 - 4x^3)$

   (c) $p(x) = -(3x^2 + 1)^2 - 7x^5$

   (d) $p(x) = (3x^2 + 2x - 5) - (2x + 1)^2 + (x + 1)^2$

   (e) $p(x) = x(x + 2)^2 - x^2(x + 2) - 2x^2 - 4x$

5. Lös ekvationerna

   (a) $3x^2 + 11x = -x + 15$

   (b) $11x^2 + 7x + 1/2 = 2x^2 + x$

   (c) $x^2 + x + 17 = 6x - 3/2$

6. Bestäm villkor på a sådant att $p(x) = 0$ har två reella rötter:

   (a) $p(x) = -x^2 + 3x + 9a$

   (b) $p(x) = 5x^2 - 7x - 3a$

7. Låt $p(z) = z^3 + z$. Hur många komplexa rötter har $p(z)$? Hur många reella rötter har det? Hitta alla rötter till $p(z)$. Kan ett polynom ha fler reella än komplexa rötter?

8. *(Svårare)* Låt $p(x) = 4ix^3 - 12x^2 + 5ix - 15$. Hitta alla dess rötter.

9. *(Svårare)* Visa att om $p(x) = ax^2 + bx + c$, där $a \neq 0$, så är rötterna till $p(x) = 0$ lika med $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

2.2. Polynomdivision och faktorsatsen

I det här avsnittet ska vi studera division av polynom och hur det hänger ihop med faktorisering av polynom. Det leder till faktorsatsen, ett viktig resultat om relationen mellan faktorer i ett polynom och polynomets nollställen. Slutligen ska vi se på en metod som kan hjälpa oss att lösa vissa tredjegradsekvationer.

2.2.1. Polynomdivision

Vid heltalsdivision p/q i Avsnitt 1.1.4 sökte vi kvoten k och resten r sådana att $p = kq + r$, med $0 \leq r < q$. Om vi vill dividera polynomet $p(x)$ med polynomet $q(x)$ ($\neq 0$) kan vi på motsvarande sätt skriva

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Polynomet $k(x)$ kallas för kvoten, polynomet $r(x)$ är restpolynomet och polynomet $q(x)$ kallas för divisorspolynomet. Kravet på $r(x)$ är att dess grad ska vara mindre än graden på divisorn $q(x)$. Då blir kvoten $k(x)$ och resten $r(x)$ unikt bestämda. Sambandet ovan kan förstås även skrivas

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Om $r(x) = 0$ är $p(x)$ *delbart* med $q(x)$ och polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ går jämnt ut. Då är $p(x) = k(x)q(x)$ och vi säger att $k(x)$ och $q(x)$ är *faktorer* i polynomet $p(x)$.

2.2.2. Divisionsalgoritmen för polynom

Låt oss nu gå igenom divisionsalgoritmen för polynom. Metoden illustreras lättast genom ett konkret exempel.

Exempel 2.2.1. Dividera $p(x)$ med $q(x)$ där $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$ och $q(x) = x^2 + 4$. Vad blir kvoten och vad blir resten?

Lösningsförslag. Vi vill finna $k(x)$ och $r(x)$ så att $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$ och där $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$.

Vi börjar med att bestämma hur många gånger högstagradstermen i divisorn $q(x)$, nämligen x^2, ”får rum i”, eller ”kan dras bort från”, högstagradstermen i $p(x)$, som är $2x^3$. Det blir $2x$ gånger, ty genom att multiplicera $q(x)$ med $2x$ får vi ett uttryck vars högstagradsterm överensstämmer med $p(x)$:s högstagradsterm. Detta ger oss

$$p(x) - 2x \cdot q(x) = (2x^3 + x^2 + 2x + 6) - (2x^3 + 8x) = x^2 - 6x + 6,$$

vilket också kan skrivas

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6).$$

Men detta är inte på den form vi är ute efter, eftersom $x^2 - 6x + 6$ inte har lägre grad än $q(x)$. Vi fortsätter och bestämmer hur många gånger högstagradstermen i divisorn $q(x)$, vilken fortfarande är x^2, kan dras bort från högstagradstermen i $x^2 - 6x + 6$. Det blir endast 1 gång. Vi ser att

$$(x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot q(x) = (x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot (x^2 + 4) = -6x + 2,$$

det vill säga

$$(x^2 - 6x + 6) = 1 \cdot q(x) - 6x + 2.$$

Nu kommer vi inte längre eftersom resten $-6x + 2$ har lägre grad än divisorn $x^2 + 4$. Jämför med division av heltal: när resten blivit mindre än det man delar med kommer man inte längre. Vid division med heltal ska resten vara ett heltal som är mindre än divisorn, vid polynomdivision ska resten vara ett polynom med lägre grad än divisorn.

Vi sätter samman resultaten och får

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6) = 2x \cdot q(x) + 1 \cdot q(x) - 6x + 2 = (2x + 1)q(x) - 6x + 2.$$

Det betyder att kvoten $k(x) = 2x + 1$ och resten $r(x) = -6x + 2$.

Man kan utföra polynomdivision med ”liggande stolen” eller ”trappan” om man så vill. Räkningarna vi utfört ovan kan sammanställas i trappan på följande sätt:

$$\begin{array}{r|r}
 & 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^2 + 4 & 2x^3 + x^2 + 2x + 6 \\ \cline{1-1}
 & -(2x^3 \qquad + 8x) \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 6x + 6 \\
 & -(x^2 \qquad + 4) \\ \cline{2-2}
 & -6x + 2.
\end{array}$$

Alltså är

$$2x^3 + x^2 + 2x + 6 = (2x + 1) \cdot (x^2 + 4) - 6x + 2.$$ □

Nu visar vi ett exempel där räkningarna görs i trappan steg för steg med förklaringar.

Exempel 2.2.2. Utför polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ där $p(x) = x^3 + 2x + 3$ och $q(x) = x + 1$.

Lösningsförslag. Vi ritar upp trappan och placerar in $p(x)$ och $q(x)$.

$$x+1 \,\big\lvert\, \overline{x^3 \qquad +2x+3}$$

Första steget är att överst i trappan ange hur många gånger x (från $x+1$) går i x^3 (från x^3+2x+3), vilket är x^2 gånger. Vi ska dra bort $x^2(x+1) = x^3 + x^2$ från $x^3 + 2x + 3$, en beräkning som vi ställer upp under trappan:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x+1 & x^3 \qquad +2x+3 \\ & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2} & \quad -x^2+2x+3. \end{array}$$

Vi har alltså tagit hand om högstagradstermen i $x^3 + 2x + 3$ och har fått fram att $x^3 + 2x + 3 = x^2(x+1) + (-x^2 + 2x + 3)$. Vi är inte klara eftersom det resterande polynomet $-x^2 + 2x + 3$ har högre grad än $x + 1$. Vi fortsätter med polynomdivision av $-x^2 + 2x + 3$ med $x + 1$. I detta steg fokuserar vi på x^2-termen. Vi kontrollerar hur många gånger x går i $-x^2$, vilket är $-x$ gånger, och subtraherar $-x(x+1) = -x^2 - x$ från $-x^2 + 2x + 3$:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x \\ \hline x+1 & x^3 \qquad +2x+3 \\ & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2} & \quad -x^2+2x+3 \\ & \quad -(-x^2-x\ ) \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 3x+3. \end{array}$$

Slutligen utför vi polynomdivision av $3x + 3$ med $x + 1$. Kvoten är då 3 och vi får följande:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 3 \\ \hline x+1 & x^3 \qquad +2x+3 \\ & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2} & \quad -x^2+2x+3 \\ & \quad -(-x^2-x\ ) \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad 3x+3 \\ & \qquad\quad -(3x+3) \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

Eftersom polynomdivisionen gick jämnt ut (vi fick resten noll) så är $x+1$ en delare till x^3+2x+3. Vi har alltså att

$$\frac{x^3 + 2x + 3}{x + 1} = x^2 - x + 3.$$

Detta kan även skrivas som $x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$, vilket ger en faktorisering av polynomet $p(x)$. □

2.2.3. Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Om det finns en faktor $(x - a)$ i polynomet kan man bryta ut denna faktor och skriva $p(x) = (x - a)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom av grad $n - 1$. Vi ser då att a är ett nollställe till $p(x)$ eftersom

$$p(a) = (a - a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

oavsett värdet på $q(a)$.

Exempel 2.2.3. Polynomet $p(x) = x^2 - 4$ kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln, vi har ju att $p(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Alltså är 2 och -2 nollställen till polynomet $p(x)$.

Vi ska nu visa att även det omvända gäller, det vill säga att om a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$ för något polynom $p(x)$, så är $(x - a)$ en faktor i polynomet. Enligt Avsnitt 2.2.1 om polynomdivision är

$$p(x) = k(x)(x - a) + r(x),$$

där $r(x)$ är ett polynom av grad noll eftersom det ska ha lägre grad än divisorn $(x - a)$. Men ett polynom av grad noll är en konstant, säg c, så att $r(x) = c$ för alla x. Eftersom vi har antagit att a är ett nollställe till $p(x)$ så är $p(a) = 0$. Använder vi uttrycket ovan erhåller vi

$$0 = p(a) = k(a)(a - a) + r(a) = k(a) \cdot 0 + c = c.$$

Alltså är konstanten $c = 0$ och därmed har vi likheten $p(x) = k(x)(x - a)$. Vi ser att $(x - a)$ är en faktor i polynomet (polynomet är delbart med $(x - a)$) och har därmed bevisat den så kallade faktorsatsen:

Sats 6. (Faktorsatsen) Uttrycket $(x - a)$ är en faktor i polynomet $p(x)$ om och endast om a är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$.

Uttrycket *om och endast om* innebär *ekvivalens*, vilket betyder att vi har visat påståendet ”åt båda hållen”: om a är en rot till $p(x) = 0$ så är $(x - a)$ en faktor i polynomet OCH om $(x - a)$ är en faktor i polynomet så är a en rot. Enligt faktorsatsen är alltså problemet att finna lösningar till en polynomekvation ekvivalent med problemet att finna förstagradsfaktorer i ett polynom.

Exempel 2.2.4. Polynomet $p(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x$ är delbart med faktorn $(x - 1)$ eftersom 1 är ett nollställe till polynomet (kontrollera detta). Även 0 är ett nollställe till $p(x)$ och alltså är $p(x)$ även delbart med $(x - 0) = x$.

Exempel 2.2.5. Låt $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Lös tredjegradsekvationen $p(x) = 0$ med hjälp av faktorsatsen.

Lösningsförslag. Om vi kan finna en heltalsrot till $p(x)$ genom att prova oss fram, så kan vi därefter utföra polynomdivision med motsvarande faktor för att därefter lösa den andragradsekvation vi då får. Vi prövar oss fram och ser att $x = 2$ är en lösning till ekvationen eftersom $p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$. Det betyder enligt faktorsatsen att $(x - 2)$ är en faktor i polynomet, vilket innebär att polynomet är delbart med $(x-2)$. Med polynomdivision, vars steg vi inte redovisar här, får vi $p(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$. Ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ är en vanlig andragradsekvation med lösningarna $x = -1$ och $x = 2$, vilka därmed även är lösningar till den ursprungliga ekvationen. Alltså har vår ekvation lösningarna $x = -1$ och $x = 2$, där den senare är en dubbelrot. Polynomet kan skrivas som $p(x) = (x + 1)(x - 2)^2$. □

Utifrån faktorsatsen kan vi även visa att en polynomekvation $p(x) = 0$ av grad n som mest kan ha n rötter. Om a_1 är en rot så gäller ju att

$$p(x) = k(x)(x - a_1)$$

där polynomet $k(x)$ är av grad $n - 1$. Låt a_2 vara en annan rot. Då gäller det att $p(a_2) = k(a_2)(a_2 - a_1) = 0$, vilket medför att $k(a_2) = 0$ och enligt faktorsatsen är $(x - a_2)$ en faktor i $k(x)$. Det ger

$$p(x) = l(x)(x - a_2)(x - a_1),$$

där $l(x)$ är ett polynom av grad $n - 2$. För varje rot a_j till ekvationen $p(x) = 0$ får vi en motsvarande faktor $(x - a_j)$ av grad ett. Eftersom $p(x)$ har grad n följer det att det inte kan finnas fler faktorer än n stycken av grad ett, vilket visar att det som mest finns n rötter.

Däremot följer det inte från detta argument att det alltid finns n rötter. Faktoriseringen av ett polynom kan innehålla en faktor ”flera gånger”, det vill säga upphöjd till ett heltal m större än 1, precis som i exemplet ovan där ett tredjegradspolynom har endast 2 nollställen. Räknar man rötterna med multiplicitet m (i exemplet räknas då nollstället 2 två gånger) och tar med alla komplexa rötter finns det exakt n stycken. Men att visa det kräver mer än vad vi får från faktorsatsen, nämligen Algebrans fundamentalsats, enligt vilken varje polynomekvation av grad ≥ 1 har (minst) en komplex rot.* Det är dock knepigare att visa och inget vi kan ta itu med här.

Exempel 2.2.6. Man vet att 1 och 3 är rötter till ekvationen $x^2 + ax + b = 0$. Bestäm a och b.

Lösningsförslag. Enligt faktorsatsen är $(x-1)$ och $(x-3)$ faktorer i x^2+ax+b, så $x^2+ax+b = l(x)(x-1)(x-3) = l(x)(x^2-4x+3)$ för något polynom $l(x)$. Om gradtal och koefficienter ska stämma överens ser vi att polynomet $l(x)$ inte kan vara något annat än konstanten 1, så att $x^2+ax+b = x^2-4x+3$. Alltså måste $a = -4$ och $b = 3$. □

2.2.4. Hur man finner rationella rötter

Oftast är det omöjligt att gissa sig till en rot till en polynomekvation $f(x) = 0$, men det finns en fiffig metod för att finna eventuella *rationella rötter* till polynomekvationer med heltalskoefficienter. Vi visar hur detta fungerar med ett exempel.

Exempel 2.2.7. Låt $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Finn alla rationella rötter till ekvationen $f(x) = 0$.

Lösningsförslag. Vi antar att vi har en rationell rot $x = \frac{p}{q}$ till ekvationen $f(x) = 0$, där $\frac{p}{q}$ är ett maximalt förkortat bråk. Då gäller att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 11\,\frac{p}{q} - 6 = 0.$$

Om vi multiplicerar båda led med q^3 får vi

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Vi adderar sedan $6q^3$ till båda led så att

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 = 6q^3.$$

Vitsen med detta är att vi nu kan bryta ut p i vänsterledet:

$$p(p^2 - 6pq + 11q^2) = 6q^3.$$

Eftersom vänsterledet här är delbart med p måste även högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer, därmed måste p dela 6. Täljaren p måste därför vara något av talen $\pm1, \pm2, \pm3$ och ±6.

På liknande sätt kan vi hitta möjliga värden på q. Vi gör detta genom att subtrahera p^3 från båda led i ekvationen

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0,$$

vilket ger

$$-6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = -1 \cdot p^3.$$

Nu kan q brytas ut i vänsterledet med resultatet

$$q(-6p^2 + 11pq - 6q^2) = -1 \cdot p^3.$$

Vänsterledet är alltså delbart med q och därför måste högerledet också vara det. Antagandet att p och q saknar gemensamma faktorer medför att nämnaren q måste dela -1, så q är lika med ±1.

*Denna rot kan förstås vara reell, det vill säga ha imaginärdel noll.

Kombinerar vi alla värden på p och q får vi att $\frac{p}{q}$ måste vara något av talen

$$
\begin{array}{llll}
\frac{1}{1} = 1, & \frac{1}{-1} = -1, & \frac{-1}{1} = -1, & \frac{-1}{-1} = 1, \\
\frac{2}{1} = 2, & \frac{2}{-1} = -2, & \frac{-2}{1} = -2, & \frac{-2}{-1} = 2, \\
\frac{3}{1} = 3, & \frac{3}{-1} = -3, & \frac{-3}{1} = -3, & \frac{-3}{-1} = 3, \\
\frac{6}{1} = 6, & \frac{6}{-1} = -6, & \frac{-6}{1} = -6, & \frac{-6}{-1} = 6.
\end{array}
$$

Alltså, om det alls finns några rationella rötter till ekvationen $f(x) = 0$ så är det $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ och/eller ± 6. Vi testar dessa genom insättning:

$$
\begin{array}{llll}
f(1) = 0, & f(-1) = -24, & f(2) = 0, & f(-2) = -60, \\
f(3) = 0, & f(-3) = -120, & f(6) = 60, & f(-6) = -504.
\end{array}
$$

De rationella rötterna till polynomekvationen $f(x) = 0$ är $x = 1$, $x = 2$ och $x = 3$.

Att alla lösningar är heltal beror på att högstagradstermen i vårt polynom har koefficienten 1. Gå gärna igenom exemplet igen och se hur det hänger ihop. □

Mer allmänt gäller följande sats.

Sats 7 (Satsen om rationella nollställen)**.** Låt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter. Om $\frac{p}{q}$ är en rot till $f(x) = 0$, där $\frac{p}{q}$ är förkortat så långt som möjligt, så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.[†]

Vi utelämnar beviset, det utförs i princip på samma sätt som vi resonerade i exemplet ovan.

Exempel 2.2.8. Låt $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Finn alla rationella lösningar till ekvationen $f(x) = 0$.

Lösningsförslag. Om polynomekvationen har en rationell rot $\frac{p}{q}$, maximalt förkortad, så måste det gälla att q är en faktor till koefficienten framför x^3 (som är 1) och att p är en faktor till den konstanta termen (som också är 1). Alltså är de enda rationella tal vi behöver testa

$$\frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{och} \quad \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Insättning ger

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 \neq 0 \quad \text{och} \quad f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

Alltså är -1 den enda rationella roten till $f(x) = 0$. □

Låt oss här påminna om Exempel 2.2.5 där vi löste en tredjegradsekvation utifrån att vi visste en rot. Om man alltså kan hitta en rot som är rationell kan de andra sedan bestämmas som nollställen till det andragradspolynom man får efter polynomdivision. Använd den metoden för att bestämma övriga rötter till ekvationen $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Vi slutar med ett exempel där rationella rötter saknas.

Exempel 2.2.9. Låt $f(x) = 8x^5 + 2x + 6$. Visa att ekvationen $f(x) = 0$ saknar rationella rötter.

Lösningsförslag. Om $f(x) = 0$ har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till 8 och att p är en faktor till 6. Möjliga värden på q är därför $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ och möjliga värden på p är $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Detta ger

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{4}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{3}{4}, \quad \pm\frac{1}{8}, \quad \pm\frac{3}{8}$$

[†]Satsen säger även något om de rationella lösningarna till en polynomekvation med rationella koefficienter. Om M är minsta gemensamma multipel för koefficienternas nämnare kan man bryta ut faktorn $1/M$ ur polynomet. Den återstående faktorn är ett polynom med heltalskoefficienter.

som möjliga lösningar. Läsaren kan—om tålamodet räcker till—verifiera genom insättning att inget av dessa rationella tal är ett nollställe till polynomet $f(x)$. Alltså saknar ekvationen $f(x) = 0$ rationella rötter. $\square$

Övningar 2.2

1. Utför polynomdivisionerna $p(x)/q(x)$ där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$ och $q(x) = x - 1$,
   (b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ och $q(x) = x^2 + 3$,
   (c) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 7$ och $q(x) = x^2 - 3x - 1$,
   (d) $p(x) = x^3 + 1$ och $q(x) = x^2 - x + 1$,
   (e) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$ och $q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.
   (f) $p(x) = x^5$ och $q(x) = x^6$.
2. Visa med hjälp av faktorsatsen (utan att utföra polynomdivision) att $p(x) = x^3 - 6x + 4$ är delbart med $(x - 2)$.
3. Lös ekvationen $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ med hjälp av faktorsatsen.
4. Finn alla heltalslösningar till ekvationen $x^4 - 2^5x^2 + 9 = 0$.
5. Bestäm de värden på konstanten k för vilka polynomet $p(x) = x^3 - kx + k^2$ är delbart med $(x + 2)$ och ange kvoten.
6. Finn alla rationella rötter till $8x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.
7. Finn alla lösningar till ekvationen $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$.
8. Visa att om $A(x)$ och $B(x)$ är jämnt delbara med $q(x)$, då är även $A(x) + B(x)$ jämnt delbart med $q(x)$.
9. Finn rötterna till följande polynom genom att faktorisera:
   (a) $x^2 - 4$
   (b) $x^2 - 6x + 9$
   (c) $x^3 + 4x^2 + 4x$.
10. Polynom kan som bekant också ha komplexa koefficienter. Hitta rötterna till $x^2 + ix$.
11. Låt $x^2 + ax + b$ vara ett polynom. Vad ska koefficienterna a och b vara för att 2 och 5 ska vara rötter till polynomet?

2.3. Linjära ekvationssystem

Det ska ordnas en fisketävling och man vill belöna både kvantitet och kvalitet. Man bestämmer sig för att utdela 20 poäng per fisk och 10 poäng per hekto.

En tävlande som får 3 abborrar med vikterna tre, två, och fem hekto får alltså $3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 160$ poäng, medan en tävlande som endast får en tvåhektosfisk får $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40$ poäng.

Låt oss nu betrakta en omvänd frågeställning: Anta att vi känner till vikten, antalet fiskar och det sammanlagda antalet poäng för två tävlande, men att vi inte vet hur många poäng det delas ut per fisk och inte heller hur mycket man får per hekto. Säg till exempel att två fiskare båda har fått 20 poäng, att den första fiskaren har fångat 1 abborre om 4 hekto, och att den andra fiskaren fångat 2 abborrar om sammanlagt 3 hekto. Hur många poäng får då en fiskare som fångat 4 abborrar om sammanlagt ett kilo?

Låt oss anta att det delas ut a poäng per fisk och b poäng per hekto. Informationen om fiskare 1 ger oss att

$$1 \cdot a + 4 \cdot b = 20$$

och informationen om fiskare 2 ger oss att

$$2 \cdot a + 3 \cdot b = 20.$$

Vi söker värden på a och b så att båda dessa linjära ekvationer uppfylls samtidigt. Detta är ett exempel på ett *linjärt ekvationssystem* i variablerna a och b. Vi skriver det som

$$\begin{cases} a + 4b &= 20 \\ 2a + 3b &= 20. \end{cases}$$

Vi löser ekvationssystemet genom *successiv eliminering* av variabler. Från den första ekvationen löser vi ut a och får

$$a = 20 - 4b.$$

Vi sätter in detta uttryck för a i den andra ekvationen och får

$$2(20 - 4b) + 3b = 20.$$

Detta är en linjär ekvation i *en variabel* som har lösningen $b = 4$. (Verifiera detta.) Sätter vi in detta värde på b i den första ekvationen får vi $a = 20 - 4 \cdot 4 = 4$. En fiskare som fångat 4 abborrar om sammanlagt ett kilo får alltså $4 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 56$ poäng.

När man har hittat en lösning till ett linjärt ekvationssystem är det oftast enkelt att verifiera att lösningen är korrekt genom insättning i alla ekvationerna. Ta för vana att alltid verifiera dina lösningar.

Att successivt eliminera variabler kan generaliseras till system med fler obekanta och med fler ekvationer. Teorin för sådana mer allmänna linjära ekvationssystem kommer läsaren stöta på under sina första kurser på högskolan.

Övningar 2.3

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3a + 2b &= 4 \\ a + 3b &= 2. \end{cases}$$

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ 4x + 2y &= 9. \end{cases}$$

3. Låt $p(x) = 2x^2 + ax + b$ vara ett polynom. Bestäm a och b så att $p(-3) = 6$ och $p(1) = 7$.

4. Förklara varför det linjära ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y &= 5 \\ 3x + 6y &= 14 \end{cases}$$
saknar lösningar.

5. *(Svårare)* Låt $p(x)$ vara ett polynom som uppfyller att $p(-x) = -p(x)$. Då $p(x)$ delas med $x - 2$ får vi en rest på 4. Vad får vi för rest då vi delar med $x^2 - 4$?

2.4. Kombinatorik

— På hur många sätt kan man få två treor när man rullar fem tärningar i spelet Yatzy?
— Hur många möjliga ordningar finns för fyra personer att bilda en kö?
— På hur många sätt kan vi välja tre personer ur en grupp med fem personer?

Kombinatorik är den del av matematiken där man svarar på frågor liknande dessa. De tre frågorna representerar olika varianter av kombinatoriska problem som vi här ska ta itu med. Fundera gärna en stund på frågorna innan du läser vidare.

2.4.1. Multiplikationsprincipen

Vi börjar avsnittet genom att förklara *multiplikationsprincipen* med ett exempel.

Exempel 2.4.1. Anna har tre tröjor och fyra par byxor. På hur många olika sätt kan hon klä sig?

Lösningsförslag. Valet av tröja är oberoende av valet av byxor. Vilken tröja Anna ska ha på sig kan hon välja på tre sätt och byxorna hon ska ha på sig kan hon välja på fyra sätt. För varje val av tröja finns fyra val av byxor. Anna kan klä sig på $3 \cdot 4 = 12$ sätt. □

Mer allmänt gäller följande: Antag att vi ska göra k val *oberoende* av varandra och att det i:te valet kan göras på m_i sätt. Då är det totala antalet valmöjligheter enligt multiplikationsprincipen

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_{k-1} \cdot m_k.$$

Exempel 2.4.2. Stryktips går ut på att man gissar hur 13 fotbollsmatcher slutar (vinst, förlust eller oavgjort). Hur många möjliga stryktipsrader finns det?

Lösningsförslag. Varje rad kan tippas på tre sätt och alla 13 rader är oberoende av varandra. Enligt multiplikationsprincipen finns

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13} = 1594323$$

stryktipsrader. Här har vi använt multiplikationsprincipen med $k = 13$ och $m_1 = m_2 = \cdots = m_{13} = 3$. Detta är alltså ett specialfall av multiplikationsprincipen där varje delval kan göras på lika många sätt. □

I Kapitel 1 studerade vi begreppet positiv delare till naturliga tal. Vi såg bland annat i Exempel 1.2.3 att talet 520, som kan primtalsfaktoriseras som $2^3 \cdot 5 \cdot 13$, har 16 positiva delare. Vi såg även att delarna till 520 är på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 1$ och $0 \le c \le 1$. För exponenten a har vi alltså fyra möjligheter (0, 1, 2 eller 3) och för exponenterna b och c har vi två möjligheter vardera (0 eller 1). Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare därför lika med $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Exempel 2.4.3. Bestäm antalet positiva delare till talet 516.

Lösningsförslag. Vi börjar med att primtalsfaktorisera: $516 = 2 \cdot 258 = 2 \cdot 2 \cdot 129 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 43 = 2^2 \cdot 3 \cdot 43$. Delarna är på formen $2^a \cdot 3^b \cdot 43^c$ där a är 0, 1 eller 2, och b och c kan vara 0 eller 1. Enligt multiplikationsprincipen är antalet positiva delare $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. □

Exempel 2.4.4. Bestäm antalet positiva delare till talet $2^5 \cdot 3^4 \cdot 17^9$.

Lösningsförslag. Varje delare är en produkt av potenser av primtalen 2, 3 och 17. Antalet olika möjliga potenser är 6, 5 respektive 10. Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare därmed lika med $6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$. □

2.4.2. Permutationer

En *permutation* är en omordning av en uppsättning olika objekt. En permutation tar hänsyn till i vilken ordning objekten kommer och varje objekt får endast vara med en gång.

Exempelvis är abc och bca olika permutationer av bokstäverna a, b och c. Så hur många permutationer av bokstäverna a, b och c finns det? Vi kan välja den första bokstaven på tre sätt, när vi har gjort detta val finns det två bokstäver kvar att välja bland. Vi kan välja en av dessa på två sätt och slutligen kan den tredje bokstaven ”väljas” på ett sätt. Alltså finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutationer av $\{a, b, c\}$, nämligen

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Vi har här använt multiplikationsprincipen med $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$.

På samma sätt kan vi beräkna antalet sätt att ordna de 52 korten i en kortlek. Det kan vi göra på $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt. För att slippa skriva ut den långa produkten inför vi nu en ny notation.

För varje positivt heltal k inför vi beteckningen $k!$ (läses *k-fakultet*) för talet

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Heltalet $k!$ är alltså produkten av alla heltal mellan 1 och k. Vi definierar dessutom $0! = 1$ av praktiska skäl. Antal permutationer av n stycken objekt är $n!$. Till exempel, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

I vårt kortleksexempel finns det alltså 52! sätt att ordna de 52 korten i en kortlek. (Med räknare kan vi få fram att detta antal blir mer än $8 \cdot 10^{67}$.)

Exempel 2.4.5. Hur många olika ”ord” kan man bilda av bokstäverna i `LUS` (alla bokstäverna ska ingå och vi struntar i om ”orden” blir läsliga)?

Lösningsförslag. Vi använder multiplikationsprincipen. Den första bokstaven kan väljas på 3 sätt, den andra på 2 och den tredje på 1 sätt. Det följer att vi kan bilda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ ord av bokstäverna i LUS. De olika orden är

`LUS`, `LSU`, `SLU`, `SUL`, `ULS` och `USL`.

Detta är förstås samma antal som antalet permutationer av bokstäverna a, b, c som vi beräknat tidigare. □

Exempel 2.4.6. Hur många möjliga ordningar finns för fyra personer att bilda en kö?

Lösningsförslag. Frågan handlar om att ordna fyra personer på rad. Det finns alltså $4! = 24$ olika sätt att göra detta på. □

2.4.3. Ordnat urval

Man kan också tänka sig att man väljer ut en del av objekten att skapa permutationer av. Ett *ordnat urval* är en ordning av en del av de objekt man har till hands. En permutation är alltså ett specialfall av ett ordnat urval där man väljer ut *alla* objekt som finns till hands.

Exempel 2.4.7. På hur många sätt kan man färglägga en flagga med tre fält i tre olika färger (som till exempel Frankrikes flagga) om vi har tio färger att välja bland?

Lösningsförslag. Vi har tre fält att färglägga. Det första kan färgläggas med någon av de tio färgerna, det andra med en av de övriga nio och det sista området med en av de återstående åtta färgerna. Detta ger oss totalt $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika flaggor. □

Vi kan generalisera flaggexemplet och med hjälp av multiplikationsprincipen får vi att det finns

$$n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

sätt att ordna k objekt utvalda från en mängd av n objekt.

2.4.4. Oordnat urval

Med en *kombination* menas ett oordnat val av objekt från en uppsättning olika objekt. Exempelvis är adc och acd samma kombination av objekten a, b, c och d.

Exempel 2.4.8. På hur många sätt kan vi välja ut tre personer ur en grupp med fem personer?

Lösningsförslag. Detta problem handlar om att välja en kombination eftersom det är en grupp personer som ska väljas, till skillnad från exemplet med flaggorna där ordningen spelade roll. Den första personen kan väljas på fem sätt, den andra på fyra och den tredje på tre sätt. Alltså kan vi göra ett ordnat urval på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt. Vi måste nu komma ihåg att för varje kombination av tre personer finns $3! = 6$ permutationer varför vi måste dividera med 6. Varje kombination svarar alltså mot sex permutationer i detta fall och svaret blir $60/6 = 10$. Låt P1 stå för person ett, P2 för person två, och så vidare. De olika grupperna som kan bildas är då

$$\{\text{P1, P2, P3}\},\ \{\text{P1, P2, P4}\},\ \{\text{P1, P2, P5}\},\ \{\text{P1, P3, P4}\},\ \{\text{P1, P3, P5}\},\ \{\text{P1, P4, P5}\},$$

$$\{\text{P2, P3, P4}\},\ \{\text{P2, P3, P5}\},\ \{\text{P2, P4, P5}\},\ \text{och}\ \{\text{P3, P4, P5}\}.$$

□

Hur många sätt finns det i allmänhet att oordnat välja k objekt från n objekt? Om vi hade tagit hänsyn till ordning hade det funnits

$$n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

val. Eftersom en mängd av k objekt kan ordnas på $k!$ sätt så kommer varje utvald mängd av objekt att förekomma $k!$ gånger när vi gör det ordnade urvalet. Vi får alltså det oordnade urvalet genom att dela med faktorn $k!$, vilket betyder att det finns

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

sätt att välja k objekt från n objekt oordnat.

Antalet sätt att välja k föremål av n möjliga dyker upp i många sammanhang och har därför fått en egen beteckning. Det betecknas $\binom{n}{k}$ och kallas *binomialkoefficient*. Det gäller alltså att

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Symbolen $\binom{n}{k}$ utläses ”n över k” eller ”n välj k”.

Exempel 2.4.9. Eftersom

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$$

finns det 35 sätt att välja ut tre personer från en grupp av sju.

Exempel 2.4.10. En pokerhand innehåller fem av de 52 korten i en kortlek. Vad är det totala antalet pokerhänder?

Lösningsförslag. Att dra fem kort ur en kortlek med 52 kort, utan att bry oss om i vilken ordning de dras är ett oordnat urval. Antal sätt detta kan göras på ges av $\binom{52}{5}$ så det finns $\frac{52!}{5!47!}$ olika pokerhänder. □

Att välja ut k av n är ju detsamma som att välja bort $(n-k)$ av n så $\binom{n}{k}$ och $\binom{n}{n-k}$ är samma tal. Vi kan även visa detta algebraiskt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

2.4.5. Summasymbolen

Summasymbolen $\sum$ införs för att man på ett mer kompakt sätt ska kunna skriva summan av ett större antal termer. Summasymbolen är den stora bokstaven sigma i det grekiska alfabetet. Om vi vill summera alla heltal mellan 1 och 30 skulle vi kunna skriva

$$1+2+3+4+5+\cdots+28+29+30,$$

men med hjälp av summasymbolen kan vi istället skriva det som

$$\sum_{k=1}^{30} k.$$

Detta läser man som ”summan av alla tal k då k går från ett till trettio”.

Exempel 2.4.11. Skriv $3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11}$ med hjälp av summasymbolen.

Lösningsförslag. Vi summerar en massa trepotenser. Exponenterna börjar på 4 och slutar på 11. Vi kan därför skriva

$$3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11} = \sum_{k=4}^{11} 3^k.$$ □

2.4.6. Binomialsatsen och Pascals triangel

Vi vet sedan tidigare att $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, enligt kvadreringsregeln. Vi ska nu se vad som händer om vi har en annan exponent än två.

Exempel 2.4.12. Multiplicera ihop parenteserna i $(x+y)^3$.

Lösningsförslag. Användning av kvadreringsregeln följt av fortsatt utveckling och förenkling ger att

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2\\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= (x+y)x^2+(x+y)2xy+(x+y)y^2\\ &= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.\end{aligned}$$

Resultatet kallas *kubregeln*. □

Exempel 2.4.13. Multiplicera ihop parenteserna i $(x+y)^4$.

Lösningsförslag. Med hjälp av kubregeln får vi

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 \\ &= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\ &= (x+y)x^3+(x+y)3x^2y+(x+y)3xy^2+(x+y)y^3 \\ &= x^4+x^3y+3x^3y+3x^2y^2+3x^2y^2+3xy^3+xy^3+y^4 \\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$ □

En formel för att beräkna $(x+y)^n$ för ett godtyckligt positivt heltal n ges av *binomialsatsen*:

Sats 8 (Binomialsatsen)**.** För heltal n gäller det att

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Beviset utelämnas, men den intresserade läsaren uppmanas försöka formulera ett eget bevis baserat på ett kombinatoriskt resonemang. (Ledning: Vid multiplikation av de n parenteserna kommer varje term innehålla antingen x:et eller y:et från varje parentes—på hur många sätt man kan välja k stycken y och därmed få $n-k$ stycken x?)

Exempel 2.4.14. Använd binomialsatsen för att utveckla $(x+y)^3$.

Lösningsförslag. Vi använder summaformeln i binomialsatsen med $n=3$ och får:

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k}y^k = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Binomialkoefficienterna framför termerna x^3, x^2y, xy^2 och y^3 är alltså 1, 3, 3 och 1, vilket stämmer med kubregeln i Exempel 2.4.12. □

Exempel 2.4.15. Bestäm koefficienten för x^4 i polynomet $(x+1)^6$.

Lösningsförslag. Med $y=1$ har vi enligt binomialsatsen att

$$(x+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k}1^k.$$

När k är 2 så är $x^{6-k} = x^4$. Alltså är koefficienten för fjärdegradstermen lika med $\binom{6}{2} \cdot 1^2 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot 1 = 15$. □

Exempel 2.4.16. Bestäm koefficienten för tredjegradstermen i polynomet $(2+x)^6$.

Lösningsförslag. Med $y=2$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(2+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^{6-k}x^k.$$

Termen då $k=3$ ger x^3. Alltså är den sökta koefficienten lika med $\binom{6}{3}2^3 = 20\cdot 8 = 160$. □

Exempel 2.4.17. Bestäm koefficienterna för x^8 och för x^{10} i utvecklingen av $(\frac{1}{x}+x^2)^{22}$. Svaren behöver inte ges på uträknad form.

Lösningsförslag. Enligt binomialsatsen är

$$\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^{22} = \sum_{k=0}^{22} \binom{22}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{22-k} \cdot (x^2)^k.$$

Vi förenklar högerledet och får

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{22-k}\cdot(x^2)^k &= \sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{-(22-k)}\cdot x^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{(-22+k)+2k} = \sum_{k=0}^{22}\binom{22}{k}x^{3k-22}.\end{aligned}$$

Vi söker först det k-värde som ger termen med x^8. Detta motsvaras av att

$$x^{3k-22} = x^8,$$

det vill säga $3k-22=8$, som har lösning $k=10$. Koefficienten framför x^8 är därmed lika med $\binom{22}{10}$.

I fallet med koefficienten för x^{10} ger villkoret $x^{3k-22}=x^{10}$ ekvationen $3k-22=10$. Denna ekvation saknar heltalslösningar. Det innebär att någon term med x^{10} inte finns med i det utvecklade uttrycket, så koefficienten för x^{10} är noll. □

Binomialkoefficienterna kan ställas upp i en ”tabell” som kallas *Pascals triangel*. Varje rad anger de olika koefficienterna vid utvecklingen av $(x+y)^n$ för ett fixt n, där den första raden motsvarar $n=0$ och koefficienten $\binom{0}{0}=1$ som kommer från $(x+y)^0=1$. Toppen av Pascals triangel ser ut så här:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\ &&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\ &&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\ && \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\ & \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} \end{array}$$

Fyller vi i binomialkoefficienternas värden får vi följande:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Exempelvis anger den sista raden som vi har med de koefficienter man får vid utvecklingen av $(x+y)^5$.

Här syns det att Pascals triangel är symmetrisk. Det beror på att $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ som vi visat tidigare. Istället för att beräkna binomialkoefficienterna med formeln $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ kan talen i Pascals triangel skrivas ner enligt en mycket enkel algoritm. Varje rad börjar och slutar med ettor, vilka motsvarar binomialkoefficienterna $\binom{n}{0}$ samt $\binom{n}{n}$. Talen däremellan fås som summan av de två tal som står snett ovanför, lite till höger och lite till vänster. Till exempel så får vi den första 10:an i rad sex genom att summera 4 och 6 som står närmast i rad fem.

Algebraiskt beskrivs denna egenskap med sambandet

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k};$$

ett tal i rad $n+1$ fås alltså som summan av två tal i rad n, nämligen det tal som står närmast till vänster och det som står närmast till höger. Att detta är sant kräver förstås ett bevis—det räcker inte att titta på bara några rader i Pascals triangel—men vi utelämnar beviset här. Exemplet med 10:an i rad sex blir med detta sätt att skriva

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

Övningar 2.4

1. I hur många olika ordningar kan sju personer ordnas i en kö?
2. Vi ska måla ett slott, en villa och en koja i olika färger. Färgerna kan väljas bland orange, lila, rosa, röd och brun. På hur många sätt kan detta göras?
3. I en skolklass finns nio elever. På hur många sätt kan man välja ut tre av dem att delta i en tävling?
4. Beräkna $\binom{7}{3}$ och $\binom{12}{10}$.
5. Bestäm koefficienten för x^9 och koefficienten för x^{10} i utvecklingen av $\left(\frac{1}{x^4} + x\right)^{30}$.

   Svaret behöver inte ges på uträknad form.
6. Titta på de första raderna i Pascals triangel. Summera talen i varje rad för att finna ett mönster summorna följer.
7. (*Svårare*) Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

   Ledning: Använd binomialsatsen för ett algebraiskt bevis, tänk på resultatet i föregående uppgift. Försök gärna också att visa det kombinatoriskt, till exempel genom att tänka på att 2^n är antalet strängar (sifferföljder) av längd n med bara ettor och nollor.
8. Du är direktör för en loppcirkus och skall för årets uppvisning välja ut 7 stycken av dina 12 loppor. Du behöver 2 jonglörer, 4 clowner och 1 levande kanonkula. Fem av dina loppor kan vara antingen jonglör eller kanonkula, 6 stycken kan vara clowner, och mästerloppan kan uppträda som allt. På hur många olika sätt kan du välja en uppsättning av loppor för uppvisningen?
9. Ett palindrom är något som blir samma sak om man läser det framlänges eller baklänges, till exempel apa, ABBA och 11011.

   (a) Hur många palindromer av längd 6 kan man bilda med hjälp av siffrorna $0, 1, 2, \ldots, 9$?

   (b) Hur många palindromer av längd 5 kan man bilda med hjälp av siffrorna $0, 1, 2, \ldots, 9$?
10. Man kan välja mellan 3 olika tröjor (röd, gul och svart), 2 olika byxor (vita och svarta) och 5 olika hattar (gul, vit, svart, grön och blå).

    (a) Lena är inte så stilig, hon kombinerar färger fritt. På hur många sätt kan hon välja sina kläder?

    (b) Jonas vill ha svarta byxor och en gul tröja, men hattens färg tycker han inte är så viktig. Hur många olika klädval har han?

    (c) Anna vill inte kombinera svarta byxor med en gul tröja. På hur många sätt kan hon kombinera olika kläder?
11. *(Svårare)* Du och din vän har handlat mat och har fyllt sju kassar som ni skall bära hem. På hur många sätt kan ni bära kassarna om du vill se till så att varje hand som du och din vän har åtminstone håller i en kasse? (Antag att du har två händer och din vän likaså. Kassarna är olika så det gör alltså skillnad vem som bär vilken/vilka kassar och i vilken hand.)

12. Du har ett förhör på en kurs du läser. Du skall förhöras av fem lärare, Lärare A, Lärare B, Lärare C, Lärare D och Lärare E. Dessa kommer att sitta på fem stolar på rad, och lärare B och C vill sitta bredvid varandra. Lärare A vill antingen sitta bredvid B, eller bredvid C. Lärare D vill sitta bredvid lärare A. På hur många sätt kan de sitta på stolarna?

2.5. Mängdlära

Begreppet *mängd* är fundamentalt i matematiken. Vi har redan stött på ett antal olika mängder, till exempel mängden av positiva heltal och mängden av rationella tal. En mängd är en samling objekt där varje objekt bara förekommer en gång. Objekten i en mängd kallas *element*. Om mängden M består av elementen a, b och c skriver vi $M = \{a, b, c\}$, elementen listas alltså inom klamrar. Notera att $\{c, a, b\}$ beskriver exakt samma mängd eftersom den innehåller exakt samma element. Ett par andra exempel är $\{0, 1/2, 3, \pi, 4\}$ bestående av fem tal och mängden av grundfärger, {röd, blå, gul, grön}.

Symbolen $\in$ används för att ange att ett element *tillhör*, eller ingår i, en mängd. Symbolen $\notin$ står då förstås för att ett element inte tillhör en mängd. Att en hel mängd X ingår i en mängd Y skrivs $X \subset Y$, vilket utläses som att X är en *delmängd* till Y.

Antalet element i en ändlig mängd X skrivs som $|X|$ och kallas *storleken på mängden* eller *kardinaliteten*.

Exempel 2.5.1. Låt $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Då gäller det att $1 \in X$ men $0 \notin X$. Vi har också att

$$\{1, 2\} \subset X$$

samt att $|X| = 4$.

Snittet av mängderna X och Y skrivs $X \cap Y$ och består av de element som tillhör både X och Y. Om inga gemensamma element finns får man den tomma mängden, vilken betecknas $\emptyset$.

Exempel 2.5.2. Här nedan är några exempel på där snitt-operationen på mängder används:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$$
$$\{0, 1/2, 3, \pi, 4\} \cap \mathbb{Z} = \{0, 3, 4\}$$
$$\{a, b, c\} \cap \{d, e, f, g\} = \emptyset.$$

Unionen av mängderna X och Y skrivs $X \cup Y$ och består av alla element i X och alla i Y.

Exempel 2.5.3. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Om X och Y är två mängder så består $Y \setminus X$ av alla element som tillhör Y men inte X. $Y \setminus X$ utläses ”Y minus X”, det påminner ju om subtraktion eftersom man kan se det som att man tar bort elementen i X från mängden Y. De element i X som inte tillhör Y påverkar då inte resultatet.

Exempel 2.5.4. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$.

Ett annat exempel är att de *irrationella talen* kan skrivas som $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, eftersom det är alla reella tal som inte är rationella.

Det är ofta opraktiskt eller rent av omöjligt att lista alla element i en mängd. Istället beskrivs mängden av ett eller flera villkor som dess element uppfyller. Till exempel kan mängden av alla jämna tal beskrivas som ”mängden av alla tal på formen $2a$, sådana att a tillhör mängden $\mathbb{Z}$”. Detta skrivs som

$$\{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

Det avdelande strecket $|$ utläses ”sådana att” (ibland skrivs kolon : istället). Vi kan lista fler villkor, som exempel ger vi mängden

$$\{a \mid a \in \mathbb{Q}, a > 2\},$$

vilket står för ”alla tal a sådana att a är rationellt och att a är större än 2”. Ibland skrivs detta istället $\{a \in \mathbb{Q} \mid a > 2\}$, det vill säga ”alla rationella tal sådana att a är större än två”.

En typ av mängder som är mycket viktiga—bland annat när vi i nästa kapitel ska undersöka funktioner—är delmängder av de reella talen $\mathbb{R}$ bestående av alla tal på tallinjen som ligger mellan två tal. Om $a \leq b$ så är $[a, b]$ *intervallet* av alla tal från a till b. Med mängdnotation har vi att

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Om vi vänder på en hakparentes, till exempel $[a, b[$, så innebär det att ändpunkten b inte tillhör intervallet. Vi kan även tänka oss ett intervall som sträcker sig ända till oändligheten. Här följer en lista av de olika möjliga intervall som finns, med motsvarande olikheter som element x i intervallen uppfyller.

$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$]a, b]$	$a < x \leq b$
$]a, \infty[$	$a < x$
$]-\infty, b]$	$x \leq b$

$]a, b[$	$a < x < b$
$[a, b[$	$a \leq x < b$
$[a, \infty[$	$a \leq x$
$]-\infty, b[$	$x < b$

Övningar 2.5

1. Låt $X = \{1, 2, 4, 6, 10, 100\}$ och $Y = \{2, 5, 6, 10, 101\}$. Bestäm följande mängder:
   (a) $X \cup Y$
   (b) $X \cap Y$
   (c) $X \setminus (X \cap Y)$
2. Gäller det att $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$?
3. Beskriv i ord mängden $\{2a \mid a \in \mathbb{Z}, 0 < a < 100\}$? Hur många element har den mängden?
4. Hur kan man med mängdnotation ange mängden av alla heltalspotenser av 10?
5. Beskriv med ord, mängden som definieras av

$$\mathbb{N} \setminus \{a \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a > 1, b > 1\}.$$

2.6. Logik

Logik handlar om hur man från påståenden kan härleda nya påståenden, alltså hur man kan dra slutsatser.

Om man till exempel påstår att $x > 10$ kan man direkt dra slutsatsen att $x > 0$. Däremot kan man inte från påståendet att $x > 0$ dra slutsatsen att $x > 10$. När ett påstående leder till ett annat men inte nödvändigtvis vice versa kallas det för en *implikation*. Med matematiska symboler skriver vi

$$x > 10 \quad \Longrightarrow \quad x > 0.$$

Detta utläses "x är större än 10 medför att x är större än 0" eller "x större än 10 implicerar att x är större än 0".

Om två påståenden implicerar varandra kallas det för *ekvivalens*. Det innebär att båda påståendena har samma sanningsvärde, och om påståendena involverar en variabel x ska det gälla att båda påståendena är sanna för exakt samma värden på x. Ekvivalens skrivs med "implikationspil åt båda hållen", till exempel gäller att $x = 2 \iff x - 1 = 1$ och att $x > 10 \iff x - 10 > 0$.

När man skriver om ekvationer för att lösa dem är strävan att ekvationerna före och efter manipulationen är ekvivalenta, så att de två ekvationerna har exakt samma lösningar. Vi har exempelvis att

$$5x + 4 = 3x + 9 \quad \iff \quad 2x = 5 \quad \iff \quad x = \frac{5}{2}$$

eftersom $x = \frac{5}{2}$ är den enda lösningen till alla tre ekvationerna.

Ekvationerna

$$(x - 1)x = x \quad \text{och} \quad x - 1 = 1$$

är *inte* ekvivalenta, ty den vänstra ekvationen har två lösningar, nämligen 0 och 2, medan den högra endast har 2 som lösning. Däremot gäller implikationen

$$(x - 1)x = x \quad \Longleftarrow \quad x - 1 = 1$$

eftersom alla lösningar till den högra ekvationen även är lösningar till den vänstra. Det är ett vanligt misstag att försöka lösa en ekvation av typen

$$(x - 1)x = x$$

genom att "dela med" x. Men det kan vara problematiskt. Om $x = 0$ är det inte möjligt att dela med x och den otillåtna divisionen gör att vi kan missa lösningar. I det här fallet missar vi lösningen $x = 0$ eftersom den uppkomna ekvationen

$$x - 1 = 1,$$

har den enda lösningen $x = 2$.

En liknande situation får vi då vi hanterar rotekvationer. Ekvationen $\sqrt{x} = x - 2$ kan vi lösa genom att kvadrera båda led, vi får då $x = (x - 2)^2$, det vill säga $x = x^2 - 4x + 4$. Genom att använda kvadratkomplettering eller *pq*-formeln finner vi att lösningarna till denna kvadratiska ekvation är $x = 4$ och $x = 1$. Men om vi sätter in $x = 1$ i de båda leden i vår ursprungliga ekvation får vi 1 respektive -1, vilket visar att $x = 1$ inte alls är någon lösning. Kruxet är att vi vid kvadreringen inte får en ekvivalent ekvation, vilket beror på att kvadrering eliminerar minustecken. Utsagan

$$-2 = 2$$

är givetvis falsk, men när vi kvadrerar båda led får vi

$$4 = 4,$$

vilket är en sann utsaga. Vid kvadrering har vi implikation men inte ekvivalens:

$$\sqrt{x} = x - 2 \quad \Longrightarrow \quad x = (x - 2)^2$$

eftersom alla lösningar till $\sqrt{x} = x - 2$ också är lösningar till $x = (x - 2)^2$, men det omvända, att alla lösningar till $x = (x - 2)^2$ även är lösningar till $\sqrt{x} = x - 2$, är inte sant. Lärdomen vi ska dra är att kvadrering av båda sidor av en ekvation kan leda till så kallade *falska lösningar*.

Varje gång man i något steg har implikation, $\Longrightarrow$, vid ekvationslösning måste man kontrollera vilka av de värden man får fram som är lösningar till den ursprungliga ekvationen.

Exempel 2.6.1. Lös ekvationen $\sqrt{x} + 2x - 3 = 0$.

Lösningsförslag. Vi skriver om ekvationen så att rotuttrycket står ensamt i vänsterled och kvadrerar sedan båda led. Vi får då att

$$\sqrt{x} + 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = (3 - 2x)^2.$$

Denna kvadratiska ekvation är ekvivalent med $9 - 13x + 4x^2 = 0$ vilken har lösningarna $x = 1$ och $x = 9/4$. Vi testar dessa värden i den ursprungliga ekvationen genom insättning och finner att $x = 1$ uppfyller ekvationen men att $9/4$ är en falsk lösning. Ekvationen har alltså en lösning, nämligen $x = 1$. □

I de exempel vi just sett har rotekvationerna exakt en lösning och kvadreringen införde en falsk lösning. Notera dock att det även finns andra varianter av rotekvationer. Till exempel har ekvationen $\sqrt{x} = -1$ inte någon reell lösning, trots att den kvadrerade ekvationen $x = 1$ uppenbarligen har en lösning, medan kvadrering av ekvationen $\sqrt{x} = x$ inte ger upphov till någon falsk lösning.

Så vilka operationer kan vi utföra på en ekvation och fortfarande säkert ha ekvivalens? Så länge vi håller oss till att multiplicera med tal och till att addera tal eller polynom gäller ekvivalens. Vid andra operationer av båda led i en ekvation kan man behöva vara mer försiktig och försäkra sig om att den nya ekvationen inte har färre lösningar än den ursprungliga eller att man inte introducerar falska lösningar utan att kontrollera dem med insättning i slutet.

Vi ska kortfattat introducera ett par begrepp till inom logik. Ibland behöver man säga att flera påståenden är sanna samtidigt, till exempel ”det regnar *och* det blåser”. I det logiska språket skriver man $\wedge$ när man menar *och*. Påståendet $x \geq 0 \wedge x \leq 0$ säger alltså att x är större än eller lika med noll, samtidigt som x är mindre än eller lika med noll. Den enda möjligheten är då att $x = 0$. Vi kan sluta oss till att

$$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Om man istället nöjer sig med att minst ett av påståendena ska vara sant använder man *eller*, vars matematiska symbol är $\vee$. Som ett exempel får vi att påståendet

$$x > 3 \vee x < 2$$

är sant för alla x som antingen är mindre än två eller större än tre.

Låt oss gå tillbaka till ekvationen $(x - 1)x = x$ som vi diskuterade tidigare i avsnittet och se ett par lösningsförslag där stegen presenteras med hjälp av symbolen $\vee$.

Exempel 2.6.2. Lös ekvationen $(x - 1)x = x$.

Lösningsförslag 1. Ett sätt att lösa ekvationen är att se det som att vi får två fall: Antingen är $x \neq 0$ och vi kan dividera med x *eller* så är $x = 0$. Alltså har vi ekvivalenserna

$$(x - 1)x = x \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 1) = 1 \vee x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \vee x = 0\ .$$

Lösningarna är 2 och 0. □

Lösningsförslag 2. Vi skriver om ekvationen så att vi får noll i högerled. Det ger ett andragradspolynom i vänsterled som är enkelt att faktorisera:

$$(x - 1)x = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 2)x = 0.$$

Om vänsterled ska vara noll så måste antingen $(x - 2)$ *eller* x vara noll, alltså

$$(x - 2)x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 2 = 0 \vee x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \vee x = 0\ .$$

Ekvationens lösningar är 2 och 0. □

Övningar 2.6

1. Avgör vilka av implikationerna och ekvivalenserna nedan som är sanna (för reella x och y):

   (a) $x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0$

   (b) $x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 1$

   (c) $x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 \wedge x \geq 0$

   (d) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \geq 0$

   (e) $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot y \geq 0$

Kapitel 3
Funktionslära

Funktioner är matematiska objekt som klassiskt har använts för att modellera naturliga samband. Vi ska definiera funktioner med hjälp av mängdlära och sedan studera några vanliga typer av funktioner, med störst fokus på polynom och trigonometriska funktioner. Den senare halvan av kapitlet behandlar derivator och integraler, en viktig del av matematisk analys.

3.1. Funktionsbegreppet

När du tänker på en funktion så tänker du förmodligen på något i stil med $f(x) = x^2$. Kanske tänker du även på en graf för funktionen och då har du förutsatt att funktionen är definierad över de reella talen. Ibland förklaras funktionsbegreppet informellt som en ”svart låda” eller ”maskin” som för ”input” av något tal ger ett annat tal som ”output”. Med hjälp av mängder ska vi ge en mer precis definition av begreppet funktion.

Definition 6. Låt X och Y vara två icke-tomma mängder. Vi säger att f är en *funktion* från X till Y om f associerar varje element $a \in X$ med ett unikt element $b \in Y$. Kort skriver vi detta som $f : X \to Y$. Om a associeras med b så skriver vi att $f(a) = b$ och vi säger att a avbildas på b eller att bilden av a är lika med b.

Exempel 3.1.1. Här ges tre exempel som illustreras i Figur 1.

(a) Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Låt $f : X \to Y$ definieras av

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3 \quad \text{och} \quad f(d) = 4.$$

Varje element i X avbildas på ett och endast ett element i Y och f är en funktion.

(b) Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Om

$$g(a) = 1, \quad g(a) = 2, \quad g(b) = 3, \quad g(c) = 3 \quad \text{och} \quad g(d) = 4,$$

så är g *inte* någon funktion från X till Y eftersom $g(a)$ inte är unikt bestämt.

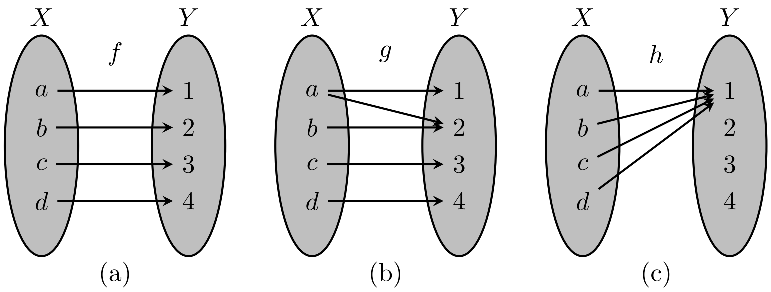
(c) Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och låt $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Sätt

$$h(a) = h(b) = h(c) = h(d) = 1.$$

Då är h en funktion från X till Y eftersom varje element i X avbildas på ett och endast ett element i Y.

3.1.1. Definitionsmängd, värdemängd och målmängd

När f är en funktion från X till Y så är X funktionens *definitionsmängd* och Y funktionens *målmängd*. Funktionens *värdemängd* är alla element i Y som är bilden av ett element i X.



Figur 1: Illustration till Exempel 3.1.1; f och h är funktioner, men inte g.

Värdemängden består alltså av alla element $b \in Y$ sådana att det finns ett a i X så att $f(a) = b$, det vill säga

$$\{b \,|\, b = f(a) \text{ för något } a \in X\}.$$

Vi skriver V_f för att beteckna värdemängden till f och D_f för att beteckna definitionsmängden till f. Värdemängden är en delmängd till målmängden Y, det vill säga

$$V_f \subset Y.$$

I Exempel 3.1.1(c) är definitionsmängden $D_h = \{a, b, c, d\}$, målmängden är $\{1, 2, 3, 4\}$ och värdemängden $V_h = \{1\}$.

Observera att när man definierar en funktion, så är det inte bara "formeln" som är del av definitionen utan även definitionsmängden och målmängden! Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ med $f(x) = x^2$ är alltså inte samma som funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x^2$.

3.1.2. Begreppen surjektiv och injektiv

En funktion för vilken värdemängden är lika med dess målmängd kallas *surjektiv*. En surjektiv funktion avbildar då definitionsmängden *på hela* målmängden.

I Exempel 3.1.1(a) finns det för varje element $y \in Y$ ett element $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Därmed är värdemängden $V_f = \{1, 2, 3, 4\} = Y$ och alltså är f surjektiv. Men för h i Exempel 3.1.1(c) gäller att värdemängden $V_h = \{1\}$ vilket inte alls är hela målmängden Y, alltså är h inte surjektiv.

En funktion f är *injektiv* om alla element i definitionsmängden avbildas på olika element i målmängden. Det är detsamma som att det inte finns två element i definitionsmängden som avbildas på samma element, eller mer formalistiskt: f är injektiv om $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$. Det innebär också att om man vet funktionsvärdet $f(a)$ så vet man vilket element a det är bilden av—man kan "gå baklänges".

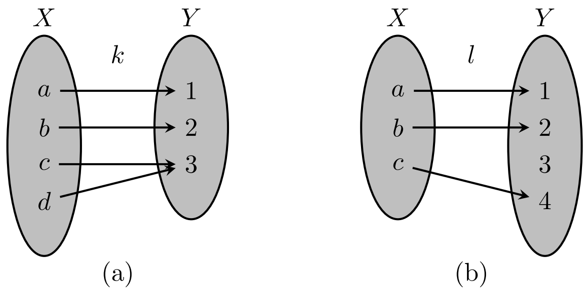
Funktionen f i Exempel 3.1.1 är injektiv eftersom a, b, c, d alla avbildas på olika element. Men funktionen h är inte injektiv, eftersom både a och b (och även c och d) avbildas på 1.

Som vi just noterat så är funktionen f (fortfarande från Exempel 3.1.1) både surjektiv och injektiv, medan h varken är surjektiv eller injektiv. Figur 2 illustrerar exempel på funktioner som har den ena egenskapen men inte den andra.

Det är viktigt att förstå att begreppen surjektiv och injektiv hänger samman med vilken definitionsmängd och målmängd man väljer, som följande exempel visar.

Exempel 3.1.2. Betrakta följande funktioner.

(a) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$. Funktionen är inte injektiv eftersom både -1 och 1 avbildas på talet 1. Funktionen är inte heller surjektiv eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är negativt. Värdemängden består av alla icke-negativa reella tal, vilket vi kan beteckna med $\mathbb{R}_{\geq 0}$.



Figur 2: (a) Funktionen k är surjektiv men inte injektiv. (b) Funktionen l är injektiv men inte surjektiv.

(b) Låt $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, där $g(x) = x^2$. Nu är funktionen injektiv eftersom det inte finns två icke-negativa tal vars kvadrat är lika. Värdemängden är precis som i föregående exempel $\mathbb{R}_{\geq 0}$, så funktionen är inte surjektiv.

(c) Låt $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, där $h(x) = x^2$. Denna funktion är både injektiv och surjektiv. Olika tal avbildas på olika tal och värdemängden är lika med målmängden ($\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Exempel 3.1.3. Låt nu $k(x) = x^2$ vara en funktion definierad från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$. Vi skulle kunna uttrycka det som att k är den funktion som kvadrerar de naturliga talen. Värdemängden är därmed $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$. Eftersom detta inte är hela $\mathbb{N}$ är k inte surjektiv; k ”träffar inte” hela målmängden $\mathbb{N}$. Men däremot är k injektiv eftersom det inte finns två naturliga tal som har samma kvadrat; vet man kvadraten kan man ”gå baklänges” och avgöra vilket tal det är man tagit i kvadrat.

I de fyra föregående exemplen har samma algebraiska uttryck, x^2, använts för att definiera alla fyra funktionerna, ändå är de inte samma funktion på grund av att deras definitionsmängder och målmängder inte är samma. Ofta underlåter man att skriva ut definitionsmängder och målmängder och låter sammanhanget avgöra; senare i kapitlet kommer vi att göra så nästan hela tiden. Om $f(x) = x^2$ är given utan definitionsmängd är det rimliga att anta att D_f är hela $\mathbb{R}$ och målmängden kan ofta antas vara samma som värdemängden. Om vi däremot har $r(x) = \sqrt{x}$, så antas definitionsmängden vara $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eftersom det är för dessa tal som kvadratroten är definierad.

Exempel 3.1.4. Vi kan definiera en funktion $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ genom att låta varje heltal a svara mot heltalet $2a$, det vill säga $j(a) = 2a$. Denna funktion blir inte surjektiv eftersom värdemängden saknar alla udda tal—$2a$ är ju alltid jämnt. (Avgör själv om funktionen är injektiv eller inte.)

Exempel 3.1.5. Låt $Y = \{\mathrm{J}, \mathrm{U}\}$ och definiera en funktion $g : \mathbb{Z} \to Y$ genom att låta

$$g(a) = \begin{cases} \mathrm{J} & \text{om } a \text{ är jämnt,} \\ \mathrm{U} & \text{om } a \text{ är udda.} \end{cases}$$

Funktionen g är surjektiv eftersom g ger båda resultaten J och U. Men g är inte injektiv eftersom det finns massor av tal som är jämna och massor av tal som är udda, till exempel är $g(1) = g(3)$ trots att $1 \neq 3$.

Exempel 3.1.6. Låt $X = \{a, b, c\}$ och låt $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm antalet injektiva funktioner från X till Y och antalet surjektiva funktioner från X till Y.

Lösningsförslag. Om vi ska konstruera en injektiv funktion f från X till Y så har vi fem val för $f(a)$. När vi bestämt $f(a)$ så har vi sedan fyra val för $f(b)$ (det får ju inte gälla att $f(a) = f(b)$

eftersom vi kräver att funktionen ska vara injektiv). Slutligen har vi tre val för $f(c)$. Det följer enligt multiplikationsprincipen att antalet injektiva funktioner från X till Y är lika med $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

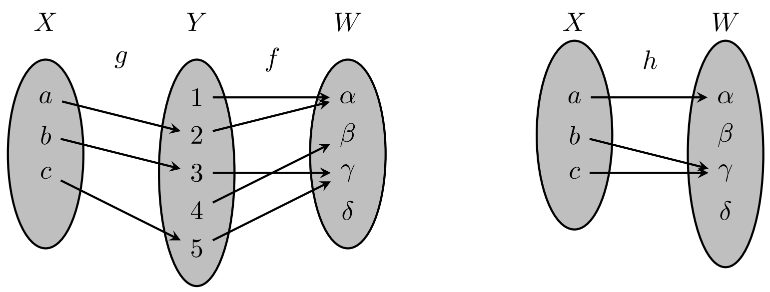
Det finns ingen surjektiv funktion från X till Y. Värdemängden kan inte vara lika stor som målmängden eftersom definitionsmängden X bara innehåller 3 element medan målmängden Y innehåller 5 element. $\square$

3.1.3. Sammansatta funktioner

Låt $g : X \to Y$ och $f : Y \to W$ vara två funktioner. Lägg märke till att funktionen g:s målmängd är densamma som funktionen f:s definitionsmängd. Om vi tar ett element $x \in X$ och applicerar funktionen g så får vi ett element i Y, det vill säga $g(x) = y \in Y$. Om vi därefter applicerar funktionen f på y så får vi ett element i W, alltså $f(y) = w \in W$. Funktionen h från X till W definierad genom att först applicera g och sedan f är den *sammansatta funktionen* av f och g, vilken alltså ges av

$$h(x) = f\big(g(x)\big).$$

Funktionen h:s definitionsmängd är X och dess målmängd är W. Figur 3 illustrerar hur två funktioner g och f kan bilda en sammansatt funktion h.



Figur 3: Funktionen g går från X till Y och f är en funktion från Y till W. Den sammansatta funktionen $h(x) = f(g(x))$ blir då en funktion från X till W. Vi ser att $h(a) = \alpha$, $h(b) = \gamma$ och $h(c) = \gamma$ så $V_h = \{\alpha, \gamma\}$.

Exempel 3.1.7. Låt oss undersöka den sammansatta funktionen av f och j för följande funktioner:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(a) = 2a$$

och

$$j : \mathbb{Z} \to \{\mathrm{J}, \mathrm{U}\}, \quad j(a) = \begin{cases} \mathrm{J} & \text{om a är jämnt,} \\ \mathrm{U} & \text{om a är udda.} \end{cases}$$

Vi kallar den sammansatta funktionen för h. Det gäller alltså att

$$h : \mathbb{Z} \to \{\mathrm{J}, \mathrm{U}\} \quad \text{och att} \quad h(a) = j(f(a)).$$

Då är

$$h(1) = j(f(1)) = j(2) = \mathrm{J}, \quad h(2) = j(f(2)) = j(4) = \mathrm{J} \quad \text{och} \quad h(3) = j(f(3)) = j(6) = \mathrm{J}.$$

Det verkar alltså som att h avbildar alla värden på J. Det stämmer, det beror på att

$$h(a) = j(f(a)) = j(2a) = \mathrm{J}$$

oberoende av värdet på a. Eftersom det inte finns något tal $a \in \mathbb{Z}$ så att $h(a) = \mathrm{U}$, så är funktionen inte surjektiv. Funktionen är inte heller injektiv eftersom den avbildar skilda element på samma element.

Exempel 3.1.8. Låt $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ och $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara sådana att $p(a) = \sqrt{a}$ och $q(a) = a$. Låt r vara den sammansatta funktionen av q och p, det vill säga $r(a) = q(p(a)) = q(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

(a) Bestäm r:s definitionsmängd och målmängd.

(b) Bestäm r:s värdemängd.

(c) Är r injektiv? Är r surjektiv?

Lösningsförslag.

(a) Eftersom r är en sammansättning av q och p har den samma definitionsmängd som p och samma målmängd som q. Definitionsmängden är alltså $\mathbb{N}$ och målmängden är $\mathbb{C}$.

(b) Värdemängden är $\{r(a) \mid a \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{a} \mid a \in \mathbb{N}\}$, det vill säga roten ur alla naturliga tal.

(c) Funktionen r är injektiv det inte finns två tal som avbildas på samma tal. Vi har ju att om $r(a) = r(b)$, det vill säga om $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, så är $a = b$, vilken bevisar att två tal inte kan ge samma funktionsvärde.

Men funktionen är inte surjektiv, till exempel så är -1 inget funktionsvärde (och inte heller $1/2$ eller π eller i).

□

Exempel 3.1.9. Låt $f(x) = x^2 + 1$ vara en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ och låt $g(x) = x + 1$ vara en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi har $f(g(x)) = f(x + 1) = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$ och $g(f(x)) = g(x^2 + 1) = x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2$. Observera att $f(g(x)) \neq g(f(x))$, något som nästan alltid gäller vid sammansättning.

3.1.4. Inverterbara funktioner

Låt f vara en surjektiv funktion från en mängd X till en mängd Y. Eftersom f är surjektiv innebär det att det till varje element b i Y finns minst ett element a i X så att $f(a) = b$. Om vi dessutom kräver att f är injektiv så betyder det att det *till varje* element b i Y finns *exakt* ett element a i X så att $f(a) = b$. Om f är injektiv och surjektiv så kan vi därför konstruera en ny funktion som ”går baklänges” från Y till X.

Definition 7. Om $f : X \to Y$ är en funktion som är både surjektiv och injektiv är f *inverterbar*. Då har f en *invers* $f^{-1} : Y \to X$ given av att

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{om} \quad f(x) = y.$$

Exempel 3.1.10. Låt f vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$ definierad genom

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 2, \quad f(d) = 4.$$

Då är f injektiv och surjektiv och f^{-1} är funktionen från $\{1, 2, 3, 4\}$ till $\{a, b, c, d\}$ som uppfyller

$$f^{-1}(1) = a, \quad f^{-1}(2) = c, \quad f^{-1}(3) = b, \quad f^{-1}(4) = d.$$

Exempel 3.1.11. Låt f vara en funktion från heltalen till de jämna heltalen definierad genom $f(a) = 2a$. Då är f injektiv och surjektiv och alltså inverterbar. Inversen, som är en funktion från de jämna heltalen till heltalen, ges av $f^{-1}(a) = a/2$ (observera att a är ett jämnt tal, och alltså delbart med två).

Notera att sammansättningen av en inverterbar funktion f från X till Y med sin invers f^{-1} är

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y,$$

så att $y \in Y$ avbildas på sig självt av denna sammansättning. En sådan funktion kallas för identitetsfunktionen på Y. Likaså gäller för sammansättningen av f^{-1} från Y till X med f att

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x,$$

så att $x \in X$ avbildas på sig självt. Inversen av f^{-1} är f.

Exempel 3.1.12. Låt f vara funktionen i Exempel 3.1.10. Vi verifierar att sammansättningen med inversen blir identitetsfunktionen på $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$f(f^{-1}(1)) = f(a) = 1, f(f^{-1}(2)) = f(c) = 2, f(f^{-1}(3)) = f(b) = 3 \text{ och } f(f^{-1}(4)) = f(d) = 4.$$

Kontrollera själv att även f^{-1} sammansatt med f (i andra ordningen) blir identitetsfunktionen på $\{a, b, c, d\}$.

Låt $f : X \to Y$ vara en funktion som är injektiv men inte surjektiv. Värdemängden V är alltså inte lika med Y. Vi kan då definiera en ny funktion $g : X \to V$ genom att sätta $g(x) = f(x)$. Funktionen g blir nu både injektiv och surjektiv—vi har ju valt målmängden till precis det som var värdemängden. Alltså är g inverterbar med invers funktion $g^{-1} : V \to X$. Den här typen av konstruktioner är väldigt vanliga i matematiken och vi kommer att stöta på den igen i avsnittet om reella funktioner där vi tittar på inverser till exponentialfunktioner.

Exempel 3.1.13. Låt f vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definierad genom $f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 2$ och $f(d) = 4$. Då är f en injektiv funktion med värdemängd $\{1, 2, 3, 4\}$, men ej en surjektiv funktion. Om vi istället låter g vara en funktion från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$ så att $g(x) = f(x)$ så blir g både injektiv och surjektiv, vilket betyder att den är inverterbar.

Jämför även skillnaden mellan Exempel 3.1.2(a) och (c).

Övningar 3.1

1. Låt f vara en funktion från $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b, c\}$ definierad genom $f(1) = a$, $f(2) = a$ och $f(3) = b$. Ange f:s värdemängd och avgör om f är injektiv.
2. Låt funktionerna $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ och $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definierade som $f(a) = a+1$ och $g(a) = a+1$. Är f surjektiv? Är f injektiv? Vad gäller för g?
3. Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $f(a) = -a$. Är f surjektiv? Är f injektiv?
4. Låt $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $g(a) = f(f(a))^2$, där $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definieras av $f(a) = -a$. Bestäm $g(a)$ utan att svara i termer av f. Är g surjektiv? Är g injektiv?
5. Låt h vara en funktion från $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ till $\{a, b, c\}$.
   (a) Ange h:s definitionsmängd.
   (b) Bestäm $h(1), h(2), h(3), h(4), h(5)$ så att h blir surjektiv.
   (c) Bestäm $h(1), h(2), h(3), h(4), h(5)$ så att h inte blir surjektiv.
   (d) Går det att bestämma h vara injektiv?
6. Låt f vara en funktion från $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b, c\}$ definierad genom $f(1) = a$, $f(3) = \alpha$, $f(\beta) = b$. Bestäm α och β sådana att f är injektiv.
7. Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Vilka av följande val av definitionsmängd och målmängd är tillåtna?
   (a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

8. Låt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

   (a) Kan man definiera $f(g(a))$? Kan man definiera $g(f(a))$?

   (b) Kan det finnas något naturligt tal n sådant att $f(n) = 2 + 3i$ eller $f(n) = 2\pi$?

9. Låt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att $f(x) = x + 2$ och låt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att $g(x) = 2x$. Hur ser de sammansatta funktionerna $f(g(x))$ och $g(f(x))$ ut? Är de samma funktion?

10. Låt $f(x) = 5x$. Bestäm f:s värdemängd och avgör huruvida f är injektiv/surjektiv i vart och ett av följande fall:

    (a) $f : \{3, 5, 6, 7\} \to \mathbb{R}$,

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

    (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

    (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

11. Bestäm om följande funktioner är injektiva respektive surjektiva:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $f(x) = x^2$,

    (b) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ så att $g(x) = -x - 3$,

    (c) $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ så att $h(x) = -\sqrt{x}$,

    (d) r definierad genom $r(x) = f(g(x))$,

    (e) s definierad genom $s(x) = f(h(x))$.

12. *(Svårare)* Vissa funktioner har egenskapen att de är både injektiva och surjektiva, och vi kallar dessa funktioner bijektiva. En egenskap hos bijektiva funktioner är att målmängden och definitionsmängden innehåller precis lika många element. Detta är lätt att se med funktioner definierade på ändliga mängder, men samma resonemang används av matematiker för oändliga mängder. Vi säger då att två mängder har samma *kardinalitet* om och endast om vi kan skapa en bijektion mellan dem. Detta leder till lite märkliga samband. För att belysa ett av dem: *Kan man skapa en bijektion mellan de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$?*

3.2. Grafer för reella funktioner

Då man arbetar med reella funktioner, alltså funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ eller från en delmängd av $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, är graferna för funktionerna ofta till stor nytta. Bilden av en funktions graf åskådliggör lättillgängligt många av funktionens egenskaper.

Att associera en funktion med dess graf är så vanligt att man inte alltid skiljer tydligt på om man talar om funktionen eller dess graf. Till exempel ett uttryck som ”funktionen planar ut” kommer från den geometriska egenskapen att grafen är planare i ena änden.

3.2.1. Det reella talplanet och grafer

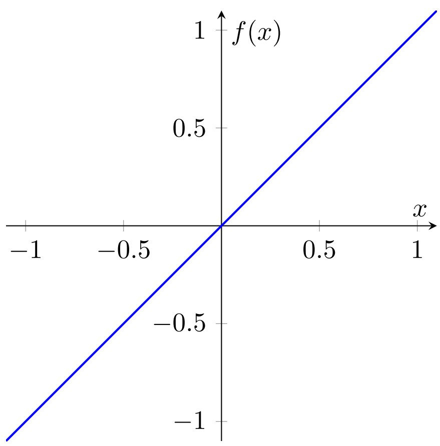
Mängden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ består av alla par (a, b) av reella tal a och b. Denna mängd representeras geometriskt med det reella talplanet (xy-planet) vilket ”spänns upp” av två koordinataxlar, vanligen en x-axel och en y-axel. Talparet (a, b) motsvarar då på välbekant sätt punkten med x-koordinat a och y-koordinat b.

Definition 8. *Grafen* (eller *funktionsgrafen*) till en reell funktion $f(x)$ är alla punkter (x, y) i det reella talplanet sådana att $y = f(x)$.

Detta stämmer förstås överens med det sedan tidigare kända sättet att representera en funktion genom att för varje x-värde markera en punkt på ”höjden” $f(x)$ (om vi på standardvis låter y-axeln vara vertikal). För varje punkt x i funktionens definitionsmängd får vi en punkt (x, y) i talplanet och alla dessa punkter är grafen. Ofta uttrycker man sig lite slarvigt och säger ”grafen $y = f(x)$”. Eftersom varje x-värde bara motsvaras av ett y-värde så kan ingen vertikal linje skära en graf i mer än en punkt.

Utifrån definitionen är det även naturligt att tänka på grafen till en funktion på följande sätt: Sambandet $y = f(x)$ kan ses som en ekvation för de två variablerna x och y. De par av tal x och y som är lösningar till ekvationen ger alla punkter (x, y) som hör till grafen.

Exempel 3.2.1. När $f(x)$ är ett förstagradspolynom, $f(x) = kx + m$, bildar grafen till f en rät linje. I Figur 4 illustreras grafen till funktionen $f(x) = x$, vilken alltså är mängden av punkter $\{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Funktionen $f(x) = x$ är injektiv eftersom $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$, eller mer lättsamt uttryckt: varje y-värde som antas motsvaras av endast ett x-värde. Funktionen $f(x) = x$ är även surjektiv—värdemängden till f är hela $\mathbb{R}$.



Figur 4: Grafen till $f(x) = x$ på $[-1, 1]$.

Exempel 3.2.2. För funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ är grafen mängden $\{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Denna kurva, $y = x^2$, visas i Figur 5. Som vi redan konstaterat i Exempel 3.1.2 är f varken surjektiv eller injektiv. Vi har ju $V_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$ och för varje $y > 0$ finns två motsvarande x-värden.

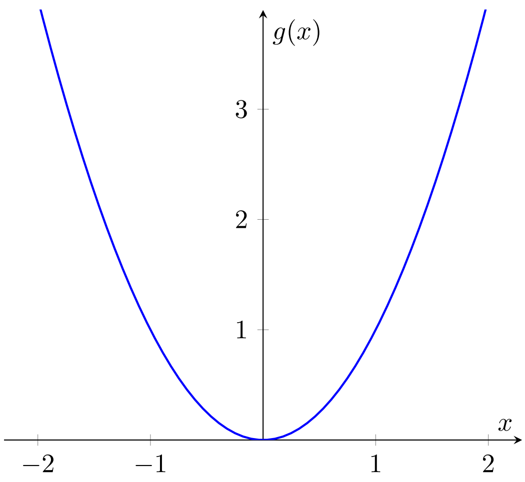
Kurvan i Figur 5 är ett exempel på en *parabel*. ”Sträck ut” kurvan i x-led eller y-led, vänd eventuellt upp-och-ner på den och flytta den i sidled och höjdled, och du har fortfarande en parabel. Allmänt beskrivs en parabel av ekvationen $y = a(x - c)^2 + b$, där a, b och c är konstanter. Varje andragradsfunktion kan skrivas på denna form med hjälp av kvadratkomplettering, så varje andragradsfunktion har en parabel som graf.

Exempel 3.2.3. Låt $X = 1, 2, 3, 9/2$ och $Y = 1, 4$ och definiera funktionen $d : X \to Y$ enligt

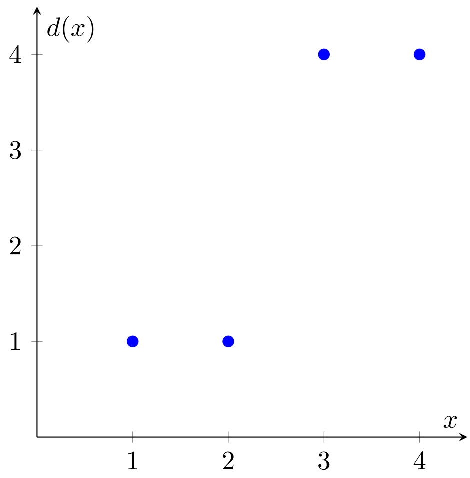
$$d(1) = 1, \quad d(2) = 1, \quad d(3) = 4 \quad \text{och} \quad d(9/2) = 4.$$

Funktionen d är ett exempel på en *diskret funktion* eftersom den är definierad på en diskret mängd (det går att räkna elementen i X*). Dess graf är $\{(1, 1), (2, 1), (3, 4), (9/2, 4)\}$; se Figur 6.

*Detta är inte ett nödvändigt krav, men ett tillräckligt, för en diskret mängd.



Figur 5: Grafen till funktionen $g(x) = x^2$ på intervallet $[-2, 2]$.



Figur 6: Grafen till funktionen d i Exempel 3.2.3.

3.2.2. Grafer till inversa funktioner

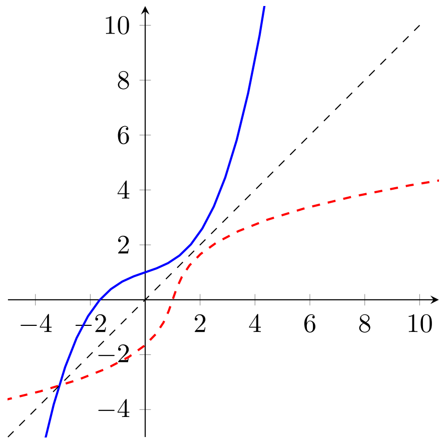
Anta att f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Då kan man se direkt från dess graf om funktionen är injektiv. För en injektiv funktion ska varje vågrät linje $y = c$ (c är en konstant) skära grafen på *högst* ett ställe, ty om den skär på två ställen finns det ju två värden på variabeln som ger samma funktionsvärde c. Undersök vad som gäller för den räta linjen i Figur 4 och parabeln i Figur 5.

Likaså kan man från grafen se om en funktion är surjektiv. För en surjektiv funktion ska varje vågrät linje $y = c$ skära grafen på *minst* ett ställe, ty om den inte skär grafen finns det inget värde på variabeln som ger funktionsvärdet c. Undersök återigen vad som gäller för den räta linjen i Figur 4 och parabeln i Figur 5.

Fundera även på hur en graf kan se ut vars funktion är injektiv men inte surjektiv, eller en graf vars funktion är surjektiv men inte injektiv. Längre fram i texten kommer vi ge sådana exempel.

Det gäller alltså att en funktion är både injektiv och surjektiv, och därmed *inverterbar*, om varje horisontell linje skär dess graf i *exakt* en punkt. Varje y-värde svarar då mot exakt ett x-värde vilket gör att om man har räknat ut $f(a)$ och fått b kan man med $f^{-1}(b)$ ”gå tillbaka” och få a.

Låt oss nu anta att den reella funktionen f är inverterar med invers f^{-1}. Hur ser inversens graf ut? Om $f(a) = b$ så är (a, b) en punkt på grafen till f. Vi har då att $f^{-1}(b) = a$ så att (b, a) är en punkt på grafen till f^{-1}. Det som hänt är att vi bytt plats på x- och y-koordinat. I vårt koordinatsystem kan vi helt enkelt byta plats på beteckningen x och y på axlarna. Men vi brukar ju inte ha x-axeln uppåt så vi ”speglar” sedan alltihop—både axlar och graf—i diagonallinjen $x = y$ så att axlarna hamnar där vi brukar ha dem. Speglingen av bilden av f:s graf visar nu bilden av inversens graf. I Figur 7 visas en funktions graf och dess spegling, vilken motsvarar inversens graf.



Figur 7: Graferna till funktionen $f(x) = x^3/10 + x/3 + 1$ och dess invers $f^{-1}(x)$ är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.

Med mängdbeteckning så är grafen till f punktmängden $\{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b = f(a)\}$ och grafen till f^{-1} är punktmängden $\{(b, a) \mid b \in \mathbb{R}, a = f^{-1}(b)\} = \{(b, a) \mid b \in \mathbb{R}, b = f(a)\}$, där sista likheten beror på att det inte spelar någon roll om vi ger sambandet mellan a och b med $b = f(a)$ eller $a = f^{-1}(b)$. I ett exempel visar vi hur man utifrån detta kan bestämma ett uttryck för den inversa funktionen.

Exempel 3.2.4. Bestäm den inversa funktionen till $f(x) = 2x + 1$.

Lösningsförslag. Funktionen är inverterbar. Grafen till $f(x)$ är punkterna i mängden

$$\{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b = 2a + 1\}$$

och grafen till den inversa funktionen är då

$$\{(b, a) \mid a \in \mathbb{R}, b = 2a + 1\}.$$

Från sambandet $b = 2a + 1$ kan vi lösa ut a, vilket ger $a = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$.

Inversens graf kan nu beskrivas enligt $\{(b, a) \mid b \in \mathbb{R}, a = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\}$. Eftersom mängden beskriver vilka punkter $(x, y) = (b, a)$ som hör till grafen ser vi, genom att ersätta b med x och a med y i mängdbeskrivningen, att det är de punkter för vilka $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, vilket innebär att $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Från denna lite omständiga lösning kan man konstatera att det väsentliga steget som behövdes för att bestämma inversen var detsamma som att lösa ut x från sambandet $y = 2x + 1$. Det ger

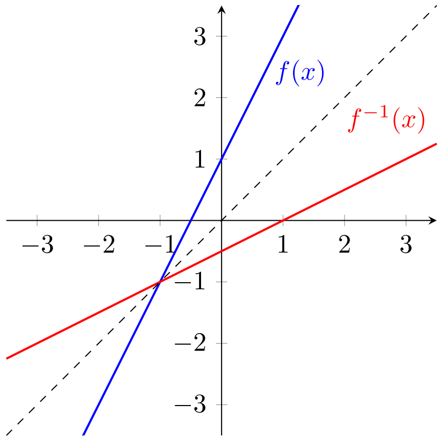
$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}.$$

Byter man nu plats på variablerna x och y får man uttrycket för inversen:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Graferna är skissade i Figur 8. Vi kan kontrollera att den invers vi bestämt är korrekt genom att kontrollera att sammansättningen av f och f^{-1} blir identitetsfunktionen, vilket följer från uträkningen

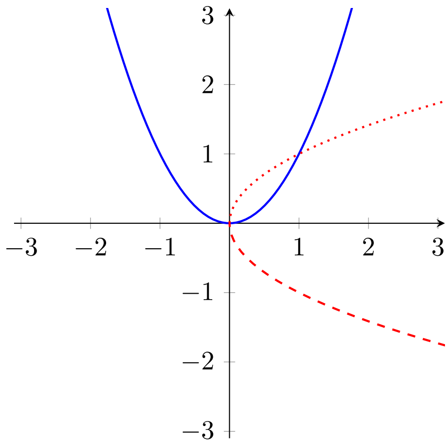
$$f\big(f^{-1}(x)\big) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = x. \qquad \square$$



Figur 8: Graferna till funktionen $f(x) = 2x + 1$ och dess invers $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. De två graferna är varandras spegelbilder i linjen $y = x$ eftersom de är varandras inverser.

Exempel 3.2.5. Andragradspolynom definierade på hela $\mathbb{R}$ är inte inverterbara eftersom de inte är injektiva. Ta till exempel funktionen $f(x) = x^2$. I Figur 9 illustreras punktmängderna $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ och $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Den andra är spegelbild av den första, men då f inte är en inverterbar funktion så är den speglade punktmängden ingen graf.

Som vi konstaterat i Exempel 3.1.2 så kan vi dock krympa definitionsmängden och målmängden från hela $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Funktionen $h(x) = x^2$ från $\mathbb{R}_{\geq 0}$ till $\mathbb{R}_{\geq 0}$ är både injektiv och surjektiv. Inversen är $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$, eftersom det ju gäller att $h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ om $x \geq 0$. Istället för att krympa definitionsmängden för $f(x) = x^2$ så kan vi säga att f är *inverterbar på intervallet* $[0, \infty[$. Det gäller också att f är inverterbar på intervallet $]\infty, 0]$, men vi kan bara välja ett av intervallen om vi vill ha en invers.

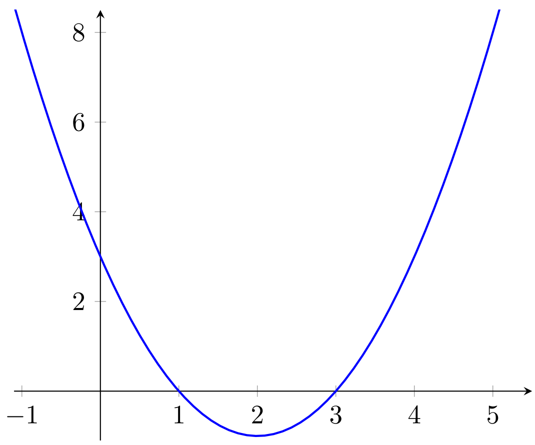


Figur 9: Den heldragna kurvan visar punktmängden $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, det vill säga grafen till $f(x) = x^2$. Den streckade kurvan visar punktmängden $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$; denna är inte någon graf. Däremot är den del som har korta streck grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och den del som har långa streck är grafen till funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$.

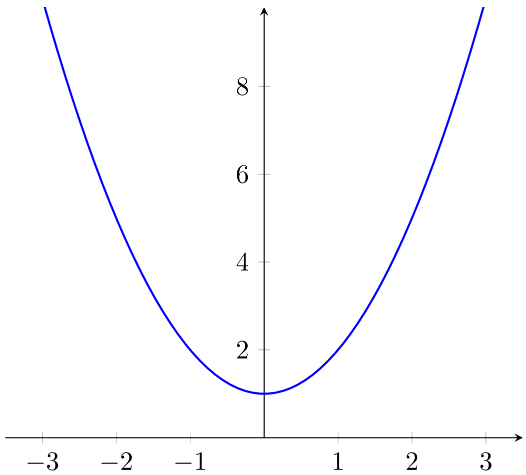
3.2.3. Skärningen av kurvor och lösningar till ekvationer

Geometriskt svarar de reella lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$ mot de x-koordinater där grafen till funktionen $f(x)$ skär x-axeln. Exempel ges i Figur 10 och 11.

På liknande sätt kan lösningarna till en ekvation $f(x) = g(x)$ tolkas som x-koordinaterna för



Figur 10: Grafen till $y = x^2 - 4x + 3$ på intervallet $[-1, 5]$. Ekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ har lösningarna $x = 1$ och $x = 3$, vilka sammanfaller med de x-koordinater där grafen skär x-axeln.



Figur 11: Grafen till $f(x) = x^2 + 1$ på intervallet $[-3, 3]$. Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ saknar reella lösningar och grafen saknar skärningspunkter med x-axeln.

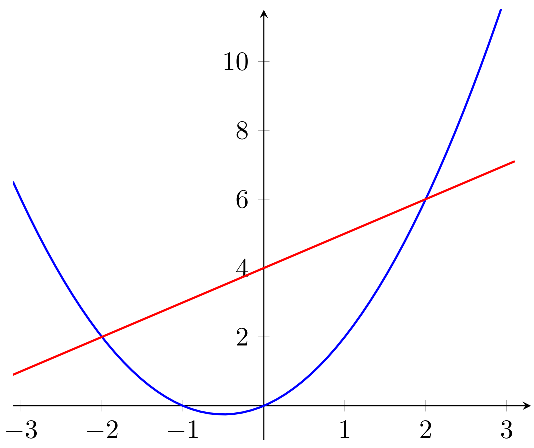
skärningspunkterna för de två graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$. Och omvänt gäller som bekant att det geometriska problemet att bestämma skärningspunkter för två grafer kan översättas till det algebraiska problemet att lösa en ekvation av typ $f(x) = g(x)$.

Exempel 3.2.6. Bestäm skärningspunkterna för graferna till $f(x) = x^2 + x$ och $h(x) = x + 4$.

Lösningsförslag. Punkternas x-koordinater ges av lösningarna till ekvationen $f(x) = h(x)$, det vill säga lösningar till ekvationen $x^2 + x = x + 4$. Dessa är $x = \pm 2$. Motsvarande y-koordinater ges av $f(2) = 6$ och $f(-2) = 2$, så skärningspunkterna är $(2, 6)$ och $(-2, 2)$, se Figur 12. $\square$

Det kan förstås även vara så att en linje och en parabel saknar skärningspunkter. Till exempel skär inte linjen $y = x - 1$ parabeln $y = x^2 + x$ eftersom ekvationen $x^2 + x = x - 1$ (som kan förenklas till $x^2 = -1$) saknar reella lösningar. Ett annat exempel ges av specialfallet som illustreras i Figur 11: parabeln $y = x^2 + 1$ har ingen skärningspunkt med x-axeln, vilken ju motsvarar linjen $y = 0$.

Kuriosa. Algebraisk geometri är ett av de stora forskningsområdena inom matematik och handlar i grunden om lösningar till system av polynomekvationer i flera variabler.



Figur 12: Graferna till $f(x) = x^2 + x$ och $h(x) = x + 4$ skär varandra i punkterna $(2, 6)$ och $(-2, 2)$.

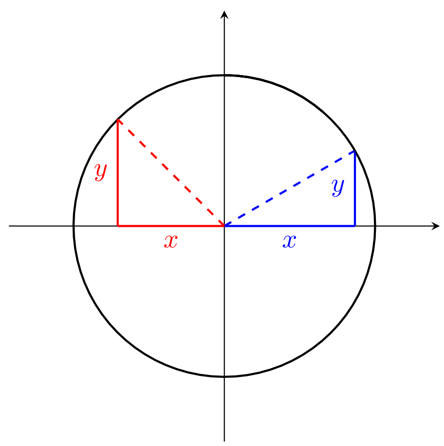
3.2.4. Cirkelns ekvation

Här ska vi göra en avstickare till en typ av kurvor som inte är funktionsgrafer, nämligen cirklar. Vi ska härleda *cirkelns ekvation*, alltså ett samband mellan x och y som är uppfyllt precis då (x, y) är en punkt på cirkeln.

Vi börjar med en cirkel som har radie r och centrum i origo. För varje punkt (x, y) på cirkeln är avståndet från punkten till origo lika med r. Enligt Pythagoras sats är $x^2 + y^2 = r^2$, vilket illustreras i Figur 13. Dessutom gäller det omvända: för varje par av tal x och y som uppfyller sambandet $x^2 + y^2 = r^2$, så ligger punkten (x, y) på cirkeln. Alltså är cirkelns ekvation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

och mängden av punkter som utgör cirkeln är $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$.

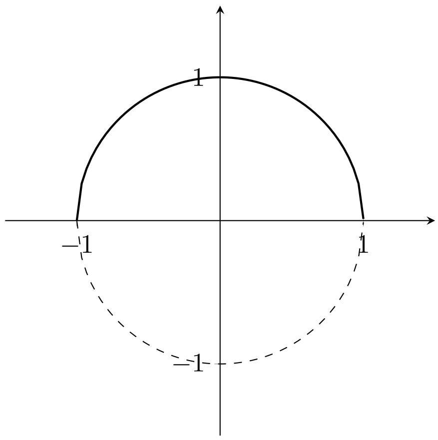


Figur 13: Cirkel med radie r och centrum i origo. Till varje punkt (x, y) kan vi rita in en rätvinklig triangel för vilken Pythagoras sats ger att $x^2 + y^2 = r^2$. Det spelar inte någon roll om koordinaterna är positiva eller negativa; kateternas längder är $|x|$ resp. $|y|$ och dessa i kvadrat ges alltid av x^2 resp. y^2.

Det finns ingen funktion $f(x)$ som har cirkeln som sin graf eftersom varje vertikal linje $x = a$ med $-r < a < r$ skär cirkeln två gånger. Detta ser vi också om vi löser ut y ur cirkelns ekvation. Det ger $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, så att det för varje $x = a$ med $-r < a < r$ finns två punkter på cirkeln, nämligen $(a, \sqrt{r^2 - a^2})$ och $(a, -\sqrt{r^2 - a^2})$.

Däremot är det möjligt att beskriva cirkeln som en union av graferna till de två funktionerna

$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ och $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, där f_1 och f_2 är definierade i intervallet $[-r, r]$. Figur 14 visar graferna i det fall då radien är ett.

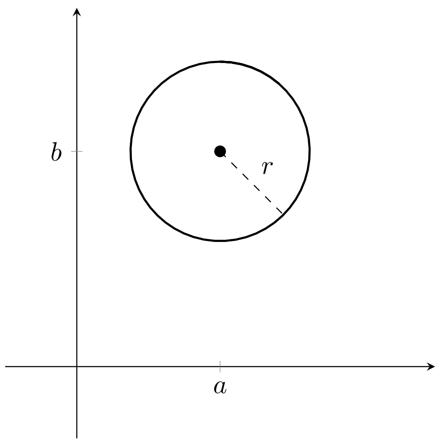


Figur 14: Cirkel med radie 1. Den heldragna linjen är grafen till funktionen $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och den streckade linjen är grafen till funktionen $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Utan större besvär kan vi gå vidare och ange cirkelns ekvation även när centrum ligger i en annan punkt än origo. Låt oss anta att centrum ligger i punkten (a, b). Om (x, y) är en punkt på cirkeln så är avståndet från punkten (x, y) till punkten (a, b) lika med r. Enligt Pythagoras sats får vi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

vilket är cirkelns allmänna ekvation; se Figur 15.

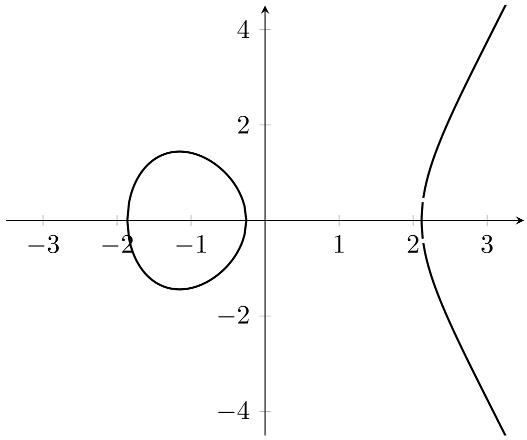


Figur 15: Cirkel med radie r och centrum i (a, b).

Exempel 3.2.7. Bestäm ekvationen för en cirkel som har sin medelpunkt i $(1, 1)$ och radie $\sqrt{2}$.

Lösningsförslag. För varje punkt (x, y) på cirkeln måste det gälla att $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$, vilket ger oss ekvationen $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. □

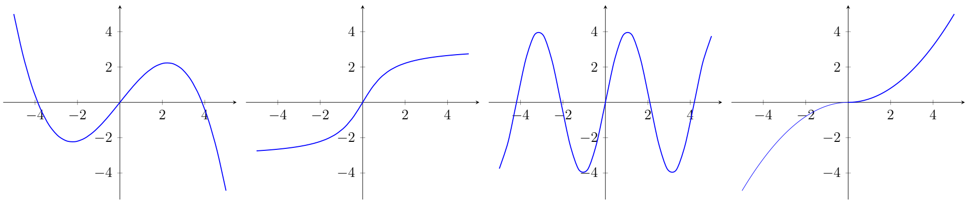
Kuriosa. Om man modifierar cirkelns ekvation kan man få andra geometriska objekt. Låt oss betrakta mängden av alla reella tal (x, y) sådana att $y^2 = x^3 - 4x - 1$. Denna punktmängd bildar en så kallad elliptisk kurva, som är intressant bland annat för sin tillämpning inom kryptografi. Som Figur 16 visar så är punktmängden väsentligt skild från cirkelns punktmängd.



Figur 16: Den elliptiska kurvan $y^2 = x^3 - 4x - 1$ på intervallet $[-3, 3]$.

Övningar 3.2

1. Rita grafen till den inversa funktionen till var och en av funktionerna givna nedan om möjligt. Ange i annat fall vilken egenskap som inte uppfylls: injektiv, surjektiv eller båda. I de fall det är möjligt, rita inversen på intervallet $[-5, 5]$ med lämplig skala på y-axeln.



3.3. Grundläggande reella funktioner och dess grafer

Vi ska nu lite kort ta upp vanliga typer av reella funktioner, nämligen polynom, rationella funktioner, exponentialfunktioner och logaritmfunktioner. Trigonometriska funktioner väntar vi med till Avsnitt 3.5.

3.3.1. Linjära funktioner

Förstagradspolynom $f(x)$ kallas för linjära funktioner och dess grafer är helt enkelt räta linjer. Med k och m som konstanter skriver vi den räta linjens ekvation på formen

$$y = kx + m.$$

Geometriskt anger talet k *lutningen* på den räta linjen, det vill säga kvoten av skillnaden i y-led med skillnaden i x-led för två godtyckliga distinkta punkter på linjen. Talet m anger den y-koordinat där linjen skär y-axeln.

En rät linje bestäms entydigt av två punkter i planet som inte har samma x-koordinat. Geometriskt är det tämligen uppenbart. Vi illustrerar med ett exempel hur linjens ekvation kan bestämmas från två punkter. Vi ger två lösningsförslag, du bör kunna använda båda metoderna.

Exempel 3.3.1. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna $(1, 2)$ och $(-1, 1)$.

Lösningsförslag 1. Den räta linjen är på formen $y = kx + m$. Att den första punkten ligger på linjen ger oss ekvationen $2 = k \cdot 1 + m$ och den andra punkten ger oss $1 = k \cdot (-1) + m$. Alltså har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} k + m = 2 \\ -k + m = 1. \end{cases}$$

Vi löser ut k ur den första ekvationen, $k = 2-m$, och sätter in i den andra. Vi får $-(2-m)+m = 1$, det vill säga $2m = 3$ eller $m = 3/2$. Det ger $k = 2 - 3/2 = 1/2$. Den räta linjen ges alltså av ekvationen $y = x/2 + 3/2$. □

Lösningsförslag 2. Den räta linjen är på formen $y = kx + m$. Lutningen k beräknas som kvoten av skillnaden i y-led med skillnaden i x-led för de två punkterna.

$$k = \frac{2-1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

För att bestämma m använder vi att en av de givna punkterna—låt oss ta $(1, 2)$—ska uppfylla linjens ekvation:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + m.$$

Det ger $m = 3/2$ och linjens ekvation är alltså $y = x/2 + 3/2$. □

I nästa exempel ser vi att det räcker med en punkt och lutningen på linjen för att bestämma linjens ekvation.

Exempel 3.3.2. Bestäm den funktion $f(x)$ vars graf är en linje som går genom punkten $(3, -1)$ och har lutning -2.

Lösningsförslag. Funktionen är på formen $f(x) = kx+m$. Att lutningen är -2 innebär att $k = -2$ och att punkten $(3, -1)$ ligger på linjen medför att $-1 = -2 \cdot 3 + m$. Detta ger $m = 5$ så den sökta funktionen är $f(x) = -2x + 5$. □

Ett specialfall är en linjär funktion med $k = 0$. Då är $f(x) = m$ och alltså är funktionsvärdet helt oberoende av x. Ska vi vara petiga så är detta alltså en linjär funktion som inte är ett förstagradspolynom. Grafen $y = m$ är en horisontell linje (parallell med x-axeln) och värdemängden till f består av ett enda tal: $V_f = \{m\}$.

En linje som är vertikal (parallell med y-axeln) motsvarar ingen graf $y = f(x)$ eftersom alla y-värden antas för ett enda värde på x. Om linjen skär x-axeln i $x = n$ så är det just detta som är linjens ekvation—alla punkter som uppfyller denna ekvation är $\{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x = n\}$.

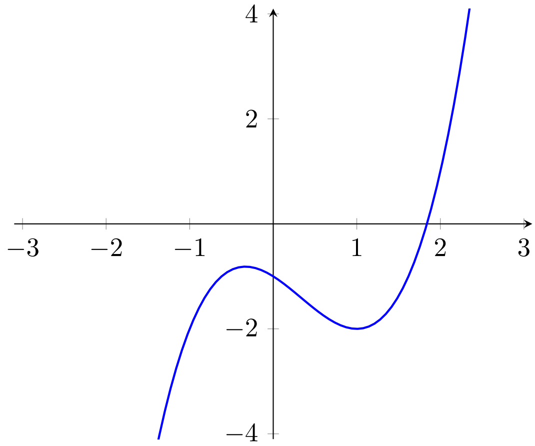
3.3.2. Allmänna polynomfunktioner

Vi har redan sett att vi kan betrakta polynom som funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Definitionsmängden för ett godtyckligt polynom kan väljas till hela $\mathbb{R}$ men om värdemängden är hela $\mathbb{R}$ eller inte beror på polynomets grad. Exempel på polynom av grad två ges i Figurer 5 och Figur 12, deras grafer är parabler och de har en begränsad värdemängd.

Allmänt gäller att när funktionen f har udda grad är värdemängden hela $\mathbb{R}$, det vill säga att f är surjektiv, men när f har jämn grad är värdemängden bara en delmängd till $\mathbb{R}$. Låt oss förklara detta med två exempel.

Betrakta först polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, vars graf delvis visas i Figur 17. När x antar stora värden kommer x^3-termens bidrag till polynomet att vara dominerande. Redan då $x = 10$ blir x^3-termen $10^3 = 1000$, vi kan jämföra med värdet på $-x^2 - x - 1$ som blir -111. Och skillnaden mellan x^3-termen och de övriga termerna växer när x ökar. Även när x blir ett tillräckligt stort negativt tal, kommer x^3-termen att dominera. För $x = -10$ är x^3-termens bidrag -1000 medan det sammanlagda bidraget hos de övriga termerna är -91.

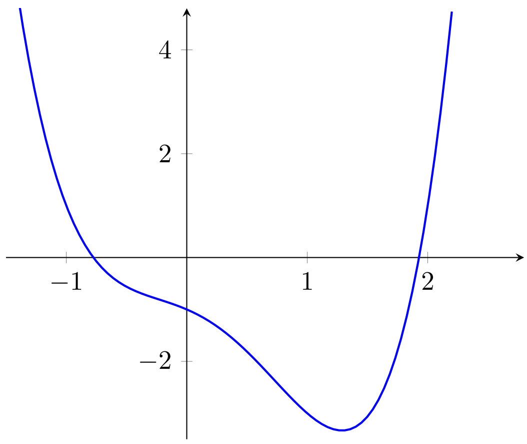
Polynomet $p(x)$ uppför sig med andra ord ungefär som x^3 när x är ett väldigt stort positivt tal eller ett väldigt stort negativt tal. Det följer att $p(x)$ är negativt när x är ett tillräckligt



Figur 17: Grafen till funktionen $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

stort negativt tal och positivt när x är ett tillräckligt stort positivt tal. Det innebär också att $p(x)$ kommer att kunna anta godtyckligt stora värden och godtyckligt stora negativa värden. Värdemängden V_p kommer därför att vara hela $\mathbb{R}$.

På motsvarande sätt kan vi se att det är x^4-termen som tydligt dominerar i polynomet $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ redan när $x = -10$ eller när $x = 10$. Det innebär att $g(x)$ är ett stort positivt tal när x är ett tillräckligt stort negativt eller positivt tal. Det följer att $g(x)$ inte kan anta hur stora negativa värden som helst, utan har ett minimum. Därmed är värdemängden till g endast en delmängd till $\mathbb{R}$ och g är alltså inte surjektiv. Grafen visas i Figur 18.



Figur 18: Grafen till funktionen $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$.

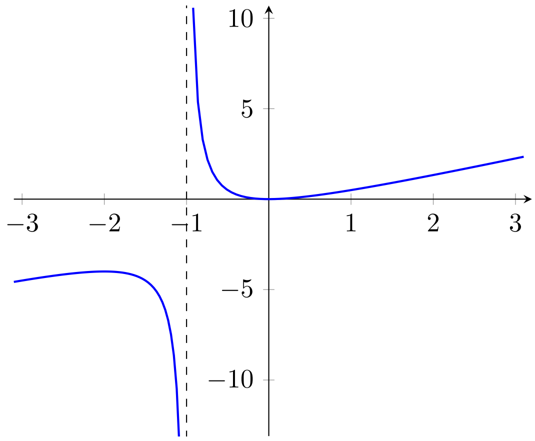
Vi ser från våra exempel att polynomfunktioner vanligen inte har någon invers. Men det finns undantag—till exempel har ju alla linjära funktioner invers. Bland de högregradspolynom som har invers kan $f(x) = x^n$ nämnas för alla udda heltal n, där inversen ges av $f^{-1} = x^{1/n}$. Ett annat exempel på ett tredjegradspolynom ges i Figur 7.

3.3.3. Rationella funktioner

En rationell funktion ges av en kvot av två polynom. Definitionsmängden till en rationell funktion är hela $\mathbb{R}$ förutom de punkter där polynomet i nämnaren är lika med noll. För exempelvis den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

är definitionsmängden alla reella tal utom -1, det vill säga $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -1\}$, vilket också kan skrivas $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. När x antar värden nära -1 blir nämnaren ett tal nära noll så att funktionsvärdet blir väldigt stort positivt eller negativt (beroende av om x är lite större eller lite mindre än -1). Grafen kommer närma sig linjen $x = -1$, så som visas i Figur 19. Denna linje kallas för en *lodrät asymptot*.



Figur 19: Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Funktionen har en lodrät asymptot i $x = -1$.

Mer allmänt kommer det uppstå lodräta asymptoter i alla punkter där en rationell funktion inte är definierad, förutom möjligen i specialfallet där polynomet i täljaren blir noll i samma punkt.

Kuriosa. En rationell funktion är inte riktigt samma sak som ett rationellt uttryck. Båda är kvoter av polynom, men för rationella uttryck tillåter man förenklingar. Det rationella uttrycket

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

kan förkortas med $x - 1$ och förenklas på så sätt till $x + 1$. Men om

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{och} \quad g(x) = x + 1$$

så är f och g inte samma funktion, eftersom f endast är definierad på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ men g är definierad på hela $\mathbb{R}$, såvida man inte explicit lägger till att definitionsmängden är något annat.

För att lösa ekvationer av typen $h(x) = 0$ där $h(x)$ är en summa av rationella funktioner gör man lämpligen först en omskrivning så att man får en polynomekvation. Man måste sedan kontrollera att lösningarna till denna inte gör att någon av de ursprungliga ingående nämnarna blir noll, för om så är fallet är det ju inte en lösning. Vi visar med ett exempel.

Exempel 3.3.3. Lös ekvationen

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + 1 = 0.$$

Lösningsförslag. Vi börjar med att skriva termerna i vänsterledet på gemensam nämnare och får

$$\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)} = 0.$$

Ska detta gälla måste täljaren vara 0, alltså

$$x + 1 + x + x(x+1) = 0,$$

vilket förenklas till

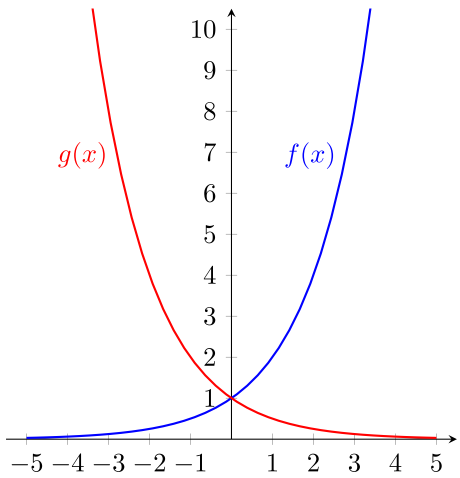
$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Lösningarna till denna polynomekvation är $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ingen av dessa gör att någon av de ursprungliga nämnarna blir noll. Alltså är $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ lösningar till ekvationen. $\square$

3.3.4. Exponentialfunktioner

En *exponentialfunktion* är en funktion som kan skrivas på formen $f(x) = Ca^x$, där basen a är ett positivt reellt tal och C är en godtycklig nollskild konstant. De baser som används mest är 2, 10 och e. Talet e, som är ungefär lika med 2.718, är det unika tal som gör att funktionen $f(x) = e^x$ är sin egen derivata (se nästa kapitel). Det är därför som e är så användbar som bas.

Definitionsmängderna för exponentialfunktionerna är hela $\mathbb{R}$ och värdemängden är de positiva reella talen, $\mathbb{R}_+$, under förutsättning att C är positiv.



Figur 20: Graferna till exponentialfunktionerna $f(x) = 2^x$ och $g(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$.

Du har förmodligen även stött på exponentialfunktioner på formen $f(x) = e^{kx}$, med en konstant k. Notera att denna kan skrivas om med en av potenslagarna enligt $f(x) = e^{kx} = (e^k)^x$. Låt nu $a = e^k$, då kan funktionen skrivas på den enklare formen $f(x) = a^x$.

Kuriosa. Talet e är faktiskt lika med den oändliga summan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots .$$

Den oändliga summan $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ innebär att vi ska addera alla tal på formen $1/j!$, där j är ett naturligt tal. Att summan verkligen blir ändlig trots att antalet termer är oändligt bevisas normalt under den inledande analyskursen på högskolan.

3.3.5. Logaritmfunktioner

Exponentialfunktionerna är injektiva: inga två x-värden ger samma funktionsvärde y. Om vi betraktar dem som funktioner från $\mathbb{R}$ till deras värdemängd $\mathbb{R}_+$ så blir de dessutom surjektiva och därmed inverterbara, enligt vad vi resonerade oss fram till i Avsnitt 3.1.4.

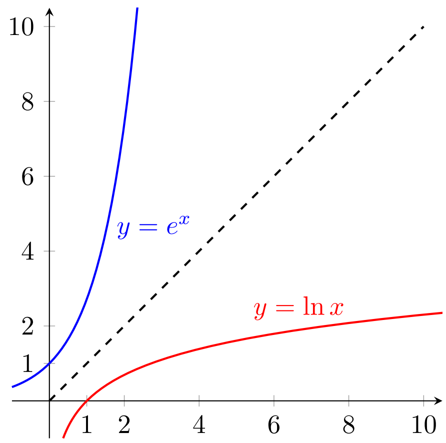
Inversen till en exponentialfunktion $f(x) = a^x$ från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}_+$ kallas *logaritmfunktion*. Definitionsmängden till en logaritmfunktion är alltså $\mathbb{R}_+$ och värdemängden är hela $\mathbb{R}$. En logaritmfunktion är alltså aldrig definierad för negativa tal.

Mer precist är 2-logaritmen, betecknad $\log_2(x)$, inversen till 2^x, 10-logaritmen, betecknad $\lg(x)$ eller $\log_{10}(x)$, är inversen till 10^x och den *naturliga logaritmen*, betecknad $\ln x$, är inversen till e^x.

Det gäller alltså att

$$e^{\ln x} = x \quad \text{för } x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{och} \quad \ln e^x = x \quad \text{för } x \in \mathbb{R}\ .$$

I Figur 21 visas graferna till e^x och $\ln x$.



Figur 21: Graferna $y = e^x$ och $y = \ln(x)$. Eftersom dessa funktioner är varandras inverser är deras grafer varandras spegelbilder i den streckade linjen $y = x$.

De så kallade *logaritmlagarna* är ofta användbara vid räkning med logaritmer. Dessa är

(i) $\log(ab) = \log a + \log b$,

(ii) $\log a^b = b \log a$.

Lagarna är en följd av räknereglerna för potenser och de gäller oavsett vilken logaritmbas man använder. Vi bevisar den första logaritmlagen för naturliga logaritmer: Låt a och b vara två positiva reella tal. Då finns det tal c och d sådana att $e^c = a$ och $e^d = b$, nämligen $c = \ln a$ och $d = \ln b$. Vi har då att $a \cdot b = e^c \cdot e^d = e^{c+d}$. Logaritmerar vi likheten $ab = e^{c+d}$ får vi $\ln(ab) = c + d$, men $c + d = \ln a + \ln b$ och därmed följer resultatet $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Med (i) och (ii) kan vi göra omskrivningen

$$\log(a/b) = \log(a \cdot b^{-1}) = \log(a) + \log(b^{-1}) = \log(a) + (-1) \cdot \log(b) = \log a - \log b$$

och har därmed visat sambandet

(iii) $\log(a/b) = \log a - \log b$.

I allmänhet går det inte att skriva om uttryck innehållandes logaritmer som rationella tal, men i följande exempel är det möjligt med en sådan förenkling.

Exempel 3.3.4. Vi har att

$$\log_2(2^3) = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

Exempel 3.3.5. Skriv $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$ som ett heltal.

Lösningsförslag. Genom att använda den första logaritmlagen baklänges får vi

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1. \qquad \square$$

Exempel 3.3.6. Förenkla $e^{\ln 5} - 3\ln 3 + \ln(e^5 \cdot 3) + \ln 9$.

Lösningsförslag. Vi har $e^{\ln 5} = 5$ eftersom den naturliga logaritmen är invers funktion till e^x. Vidare är den tredje termen $\ln(e^5 \cdot 3) = \ln e^5 + \ln 3 = 5\ln e + \ln 3 = 5 + \ln 3$. Detta ger

$$\begin{aligned} e^{\ln 5} - 3\ln 3 + \ln(e^5 \cdot 3) + \ln 9 &= 5 - 3\ln 3 + 5 + \ln 3 + \ln 9 \\ &= 10 - 2\ln 3 + \ln 9 = 10 - \ln 3^2 + \ln 9 = 10. \end{aligned}$$ □

Vid den här typen av förenklingar finns det flera olika vägar att skriva om på som fungerar lika bra, det finns ingen regel som anger att man bör använda logaritmlagarna i någon särskild ordning.

Ett vanligt misstag vid logaritmräkning är att skriva om $\log(x+y)$ som $\log(x) + \log(y)$, men i allmänhet är $\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$. Om vi till exempel låter $x = y = 4$ så får vi

$$\log_2(x+y) = \log_2(4+4) = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3,$$

medan

$$\log_2(x) + \log_2(y) = \log_2(4) + \log_2(4) = \log_2(2^2) + \log_2(2^2) = 2 + 2 = 4.$$

Nu ska vi lösa några ekvationer. Om variabeln finns som en exponent i ekvationen kan man ha nytta av att ta logaritmen av ekvationens båda led och om logaritmen av variabeln förekommer i ekvationen kan man titta på den ekvation man får om man tar e upphöjt till de båda leden. Detta fungerar dock bara om ekvationen inte är för komplicerad och man kan behöva göra en smart omskrivning först.

Exempel 3.3.7. Lös ekvationen $e^x = 2$.

Lösningsförslag. Logaritmering av båda led ger oss $\ln e^x = \ln 2$. Eftersom $\ln e^x = x$ så blir $x = \ln 2$ lösningen till ekvationen. □

Exempel 3.3.8. Lös ekvationen $\ln x = 5$.

Lösningsförslag. Vi exponentierar båda led och får $e^{\ln x} = e^5$. Eftersom $e^{\ln x} = x$ så är $x = e^5$. □

Exempel 3.3.9. Lös ekvationen $2\ln(x-4) = \ln(x) + \ln(2)$.

Lösningsförslag 1. Vi skriver om ekvationen som $\ln(x-4)^2 = \ln(2x)$ genom att använda logaritmlagarna. Vi exponentierar därefter båda led och får ekvationen $(x-4)^2 = 2x$. Denna andragradsekvation har rötterna $x = 2$ och $x = 8$, men eftersom vänsterledet är odefinierat[†] för $x = 2$ är detta inte en lösning.

Vi kontrollerar med insättning om $x = 8$ är en äkta lösning:

$$VL = 2\ln(4) = \ln(4^2) = \ln(16) \quad \text{och} \quad HL = \ln(8) + \ln(2) = \ln(8 \cdot 2) = \ln(16).$$

Leden stämmer överens så ekvationens lösning är $x = 8$. □

Vi bör här påpeka varför det dök upp en falsk rot i exemplet. I det första steget av lösningen använde vi logaritmlagen $\log a^b = b \log a$ för att skriva om $2\ln(x-4)$ som $\ln(x-4)^2$. Men likheten $2\ln(x-4) = \ln(x-4)^2$ gäller endast för $x > 4$ eftersom det vänstra ledet annars inte är väldefinierat. Så vid användning av logaritmlagarna kan det smyga sig in falska lösningar på liknande sätt som vi såg för fallet vid kvadrering av rotekvationer i Avsnitt 2.6.

Övningar 3.3

1. Vilka av följande mängder av punkter (x, y) utgör grafen till en funktion $y = f(x)$? Varför?

   (a) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$.

[†] Logaritmfunktionernas definitionsmängd är $\mathbb{R}_+$ så $\ln(2-4) = \ln(-2)$ är odefinierat.

(b) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x - y^2 = 0$.

2. Låt $f(x) = x^2$. Rita kurvorna som ges av följande samband:

   (a) $y = f(x)$

   (b) $y = f(x - 1)$

   (c) $y = f(x) + 1$

   (d) $y = f(-x)$.

3. Värdet $f(x)$ av en funktion f kan ges av olika regler för olika värden på variabeln x. Rita grafen till funktionen nedan på intervallet $[-3, 3]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{då } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{då } x > 1. \end{cases}$$

4. Låt $f(x) = 2x$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.

5. Låt $f(x) = 3x + 5$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.

6. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkten $(3, 7)$ och har lutningskoefficient $1/2$.

7. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkterna $(-3, 5)$ och $(\frac{3}{2}, 10)$.

8. Lös ekvationerna

   (a) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$

   (b) $\ln(1/x^2) + \ln x^3 = 0$

9. Förenkla $10^{\lg 5} + \lg(6 \cdot 5) - \lg(3^3) + \lg 9$.

10. *(Svårare)* För ett radioaktivt sönderfall gäller formeln

$$m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$$

där $m(t)$ är ämnets massa vid tiden t och λ är sönderfallskonstanten. Med halveringstiden T menas den tid det tar för ämnet att reducera sin massa till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T.

11. Lös ekvationerna

   (a) $3^{x^2} 3^{2x} = \frac{1}{3}$

   (b) $4^{t+2} - 48 = 16$

   (c) $(e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = 1$.

12. Lös ekvationerna

   (a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{5x^3 - 5}{x^3 - 1}$

   (b) $\dfrac{x - 3}{x + 4} = \dfrac{x + 4}{x - 3}$

   (c) $\dfrac{5(x - 3)}{2x + 8} = \dfrac{10}{2x^2 - 32}$.

13. Ge en uppskattning av talet e genom att summera de fem första termerna i den oändliga summan som definierar e.

14. Hitta med papper och penna åtminstone tre punkter på den elliptiska kurvan i Figur 16. *Tips:* Ansätt x-koordinaten och försök lösa den uppkomna ekvationen. Upprepa.

3.4. Olikheter och absolutbelopp

3.4.1. Olikheter

I det här avsnittet ska vi se hur man kan lösa olikheter, alltså samband som liknar ekvationer men där vi istället för likhet har det svagare villkoret att det ena ledet ska vara större än det andra, alternativt större än eller lika med. Ett exempel på en enkel olikhet är $2 + x > 3$. Denna olikhet är sann för alla $x > 1$. Vid omskrivningar av olikheter gäller nästan detsamma som när man arbetar med ekvationer, men vid multiplikation (eller division) med negativa tal måste man vara försiktig. Följande gäller:

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & a > b & \iff & a + c > b + c \\ \text{(ii)} & a > b & \iff & r \cdot a > r \cdot b \text{ om } r > 0 \\ \text{(iii)} & a > b & \iff & r \cdot a < r \cdot b \text{ om } r < 0. \end{array}$$

Testa med några par av tal a och b sådana att $a > b$ och ett negativt tal r för att övertyga dig om att den sista regeln gäller, oberoende av om a och b är positiva, negativa eller har olika tecken.

När man arbetar med ekvationer drar man rätt ofta nytta av att man kan byta tecken i båda led. Notera att byta tecken i båda led är detsamma som att multiplicera båda led med -1, vilket alltså enligt (iii) innebär att man måste ”vända på olikheten”. Alternativt kan man subtrahera både vänster och högerled från båda led i olikheten, vilket resulterar i att man ”bytt plats på höger och vänsterled och ändrat deras tecken” men inte ändrat olikhetstecknet.

När man löser olikheter är det naturligt att det oftast blir ett eller flera intervall som är lösningen och inte bara ett eller några få värden. Vi börjar med ett par exempel med linjära olikheter.

Exempel 3.4.1. Bestäm lösningsmängden till olikheten $5x - 12 > 18$.

Lösningsförslag. Vi använder första regeln och adderar 12 till båda led:

$$5x - 12 > 18 \quad \iff \quad 5x > 30.$$

Vi kan nu multiplicera båda led med (det positiva talet) $\frac{1}{5}$, det vill säga vi dividerar med 5. Vi får

$$5x > 30 \quad \iff \quad x > 6.$$

Lösningen till olikheten är $x > 6$, vilket också kan skrivas som $x \in]6, \infty[$. □

Exempel 3.4.2. Finn de x för vilka båda dessa olikheter gäller: $4x - 7 \geq 20$ och $5 - 2x \geq 7$.

Lösningsförslag. Först löser vi de två olikheterna var för sig. Den första olikheten skrivs om enligt

$$4x - 7 \geq 20 \quad \iff \quad 4x \geq 27 \quad \iff \quad x \geq \frac{27}{4} \quad \iff \quad x \in \left[\tfrac{27}{4}, \infty\right[,$$

och den andra olikheten skrivs om enligt

$$5 - 2x \geq 7 \quad \iff \quad -2 \geq 2x \quad \iff \quad -1 \geq x \quad \iff \quad x \leq -1 \quad \iff \quad x \in \left]-\infty, -1\right].$$

Vi ska nu bestämma de x som tillhör båda dessa lösningsmängder. Men det finns inga sådana x, eftersom inga tal kan vara större än $27/4$ samtidigt som de är mindre än -1. Alltså finns inga x som uppfyller båda olikheterna. □

Nu när vi bemästrat linjära olikheter angriper vi olikheter med polynom av högre grad. Som metod kommer vi att använda en *teckentabell* med vilken vi undersöker på vilka intervall som polynomets faktorer är positiva respektive negativa.

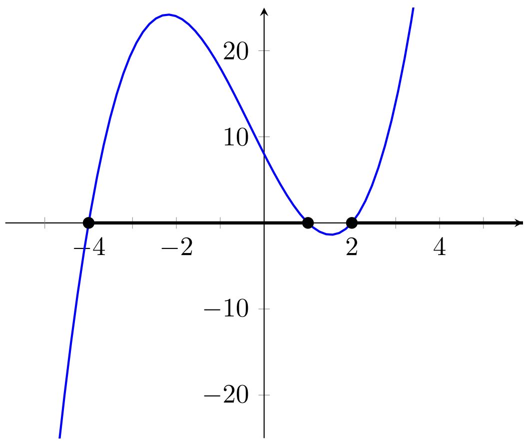
Exempel 3.4.3. För vilka x är $(x-1)(x-2)(x+4) \geq 0$?

Lösningsförslag. Frågan är alltså för vilka x som polynomet i vänsterledet är lika med eller större än noll. Eftersom polynomet är faktoriserat är det lätt att se att dess nollställen är $x = 1$, $x = 2$ och $x = -4$. Det är vid dessa värden som vänsterledet kan växla från att vara negativt till positivt eller tvärtom. Vi använder nollställena och uttryckets faktorer för att ställa upp en teckentabell.

		-4		1		2	
$(x+4)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-2)(x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Överst i tabellen anges de värden där vänsterledet är 0 i storleksordning, kolumner före, emellan och efter dessa värden motsvarar intervall. I varje rad fyller man i var faktorerna i vänstra kolumnen är noll, positiva resp. negativa; till exempel är $(x+4)$ noll i $x = -4$, negativt för $x < -4$ och positivt för $x > 4$. Multiplicerar vi de tre faktorerna får vi sista raden vilken motsvarar hela uttrycket. Dess tecken följer av hur många minus som förekommer i varje kolumn, eftersom ”minus gånger minus blir plus”; exempelvis är det i intervallet mellan -4 och 1 ett $+$ och två—vilket gör att produkten av de tre faktorerna är positiv i detta intervall.

Från tabellens sista rad läser vi av att olikheten är uppfylld då $-4 \leq x \leq 1$ samt då $2 \leq x$, vilket även kan skrivas $x \in [-4, 1] \cup [2, \infty[$. Jämför med grafen i Figur 22.



Figur 22: Grafen $y = (x-1)(x-2)(x+4)$ med de intervall där $y \geq 0$ fetmarkerade.

□

I en teckentabell kan man lätt avgöra var ett uttryck är positivt respektive negativt. Ska man ha nytta av detta när man löser en olikhet måste ena ledet vara noll, alltså kan man behöva börja med en omskrivning av olikheten.

Exempel 3.4.4. För vilka x är $x^2 - 5x < -6$?

Lösningsförslag. Vi skriver om olikheten som $x^2 - 5x + 6 < 0$. För att faktorisera vänsterledet behöver vi lösningarna till $x^2 - 5x + 6 = 0$. Denna andragradsekvation har rötterna $x = 2$ och $x = 3$. Vi kan därmed faktorisera vänsterledet som $(x-2)(x-3)$ (kontrollera att detta ger $x^2 - 5x + 6$). Olikheten $(x-2)(x-3) < 0$ löser vi med hjälp av en teckentabell.

		2		3	
$(x-2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi läser av från teckenschemat att $(x-2)(x-3)$ är negativt då $2 < x < 3$. Alltså är olikheten $x^2 - 5x + 6 < 0$ uppfylld för $x \in]2, 3[$. □

Här har vi sett hur olikheter med polynom kan lösas genom omskrivning så att ena ledet är noll och det andra ledet innehåller det faktoriserade polynomet. Metoden fungerar även om man inte har polynom om man lyckas med en lämplig faktorisering där man kan avgöra i vilka intervall de olika faktorerna är positiva respektive negativa.

3.4.2. Absolutbelopp

Absolutbeloppet av ett tal kan sägas vara ett mått på storleken av talet, oberoende av om det är positivt eller negativt. Så absolutbeloppen av talen 100 och -100 är båda 100. Absolutbeloppet av ett tal x, vilket skrivs $|x|$, kan tolkas som avståndet mellan 0 och x på tallinjen.

För alla positiva tal x gäller alltså att $|x| = x$, och detta är sant även då $x = 0$. Men då x är negativt kan man säga att absolutbeloppet ”tar bort minustecknet”. Att ”ta bort minustecknet” för ett negativt tal är detsamma som att multiplicera talet med -1. Därför kan vi ge denna definition:

Definition 9. För $x \in \mathbb{R}$ betecknar $|x|$ *absolutbeloppet av x*. Detta definieras av att

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Grafen för denna funktion finns lite längre fram i boken, i Figur 49. Ibland anges istället att $|x| = \sqrt{x^2}$, vilket ger exakt samma resultat.

Exempel 3.4.5. Enligt definitionen får vi exempelvis att $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

För de negativa talen i exemplet ovan hade vi förstås bara kunnat ”ta bort minustecknet” direkt. Men när man arbetar med uttryck innehållandes någon variabel är det viktigt att komma ihåg ”ett extra minus” i de fall då det man ska ta absolutbeloppet av är negativt.

Att ekvationen $|x| = 3$ har lösningarna $x = 3$ och $x = -3$ är lätt att se—dessa två tal är ju de som ligger på avståndet 3 från origo. När uttrycket som man ska ta absolutbeloppet av är aningens knepigare är det däremot oftast lättast att dela upp problemet i flera fall, i enlighet med definitionen: ett fall då det man tar absolutbeloppet av är positivt (eller noll) och ett då det är negativt.

Exempel 3.4.6. Lös ekvationen $|x-4| = 2x-1$.

Lösningsförslag. Vi delar upp problemet i två fall.

Fall 1: Om $x - 4 \geq 0$, alltså för $x \geq 4$, är $|x-4| = x-4$. Ekvationen blir då

$$x - 4 = 2x - 1,$$

vilken har lösningen $x = -3$. Detta är dock inte en lösning som uppfyller villkoret i fallet: -3 är ju mindre än 4 så förutsättningen att $x \geq 4$ är inte uppfylld.

Fall 2: Om $x - 4 < 0$, alltså för $x < 4$, är $|x-4| = -(x-4)$. Ekvationen blir då

$$-(x-4) = 2x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 5 = 3x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{5}{3}.$$

Detta är en lösning eftersom förutsättningen (för Fall 2) att $x < 4$ är uppfylld.

Ekvationen har en lösning, $x = 5/3$. *Kontrollera att lösningen stämmer genom insättning i ekvationen.* □

Vi ska inte gå vidare och se vad som händer om man till exempel har ett andragradsuttryck som man ska ta absolutbeloppet av, men det är på sin plats med en kommentar: De ekvationer som fås i de olika fallen kan ha lösningar som inte stämmer överens med förutsättningen för det aktuella fallet. Det är alltså i allmänhet nödvändigt att kontrollera att förutsättningen är uppfylld eller alternativt att man kontrollerar lösningarna man fått fram i den ursprungliga ekvationen.

Vi avslutar med ett exempel där vi använder det vi lärde oss om linjära olikheter i kombination med absolutbelopp.

Exempel 3.4.7. Lös olikheten $|x-5| \geq 3$.

Lösningsförslag. Vi delar upp problemet i två fall.

Fall 1: Då $x-5 \geq 0$, alltså för $x \geq 5$, är det inom absolutbeloppet positivt och vi kan ta bort absolutbeloppstecknen. Vi får olikheten

$$x-5 \geq 3,$$

vilket ger oss $x \geq 8$. Alla dessa x uppfyller även $x \geq 5$, vilket var förutsättningen för det här fallet. Alltså är $x \geq 8$ giltiga lösningar.

Fall 2: Då $x-5 < 0$, alltså för $x < 5$, är det inom absolutbeloppet negativt och vi får istället olikheten

$$-(x-5) \geq 3,$$

vilken efter multiplikation med -1 i båda leden ger $x-5 \leq -3$. Slutligen får vi då att $x \leq 2$. Alla dessa x uppfyller även förutsättningen att $x < 5$, så de är giltiga lösningar.

Lösningsmängden ges av $x \leq 2$ och $x \geq 8$. □

Övningar 3.4

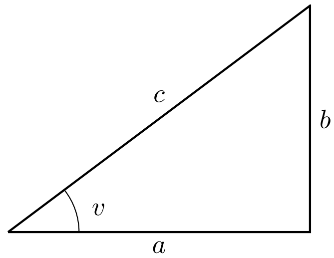
1. Lös följande olikheter:
   (a) $3x+6 > x-8$
   (b) $x^2+2x > 3$
   (c) $(x-2)(x^2+4x+4) \geq 0$.
2. Låt f och g vara två reella funktioner definierade av $f(x) = x^2+x-2$ och $g(x) = 1-2x$. Bestäm alla skärningspunkter mellan f:s och g:s grafer. Rita graferna i samma figur. För vilka x är $f(x) > g(x)$?
3. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $x - \sqrt{x} = 3/4$.
4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{x} = -2$.
5. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{4x-8} + 2 = x$.
6. Lös ekvationerna
   (a) $|x| = 1$
   (b) $|x| - 1$
   (c) $|x-2| = 0$
   (d) $|x^2-9| = 7$
   (e) $|x| + x^2 = 1$
   (f) $3x + |x-3| = 5$
   (g) $|x^2+4x+4| = 1$
   (h) $|x^2-5x+6| = -2x + \frac{19}{4}$.

3.5. Trigonometri

Trigonometri används i geometrin för att beräkna avstånd och vinklar, men även i många andra sammanhang. Detta är ett lite mer omfattande avsnitt. Vi ska bekanta oss med de trigonometriska funktionerna och lösa trigonometriska ekvationer. Vi börjar med att studera rätvinkliga trianglar och enhetscirkeln.

3.5.1. Rätvinkliga trianglar

En rätvinklig triangel är en triangel med en rät vinkel, alltså en vinkel på 90°; ett exempel visas i Figur 23. De sidor som bildar en rät vinkel mot varandra, sidorna a och b i figuren, kallas *katetrar* och den tredje sidan, c, kallas för *hypotenusan*. Vi gör även skillnad mellan de båda kateterna. När vi betraktar vinkeln v säger vi att a är den närliggande kateten och b den motstående.

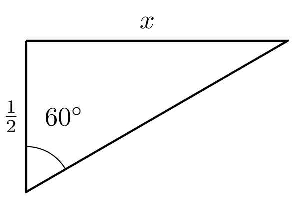


Figur 23: En rätvinklig triangel. Sidorna a och b är katetrarna, c är hypotenusan.

Kateternas längder a och b i en rätvinklig triangel, som den i Figur 23, är förstås avgörande för hur stor vinkeln v är. Men v ändras inte om man skalar om triangeln, så att den till exempel blir dubbelt så stor.[‡] I själva verket är det kvoten b/a som är relevant för hur stor vinkeln v är. Talet b/a kallas för "tangens för vinkeln v". Motsvarande resonemang gäller även kvoterna a/c och b/c. Utifrån denna insikt gör vi följande tre trigonometriska definitioner.

$$\begin{aligned} &\text{Tangens för } v: \qquad && \tan v = \frac{b}{a} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \\ &\text{Sinus för } v: && \sin v = \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \\ &\text{Cosinus för } v: && \cos v = \frac{a}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} \end{aligned}$$

Exempel 3.5.1. Finn ett uttryck för x i Figur 24 med hjälp av trigonometri.



Figur 24: En rätvinklig triangel där det är möjligt att bestämma sidan x.

Lösningsförslag. Enligt definitionen av tangens ser vi att

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}}.$$

[‡]Detta är ett specialfall för sidlängdernas förhållanden i *likformiga* trianglar.

Multiplikation med $\frac{1}{2}$ på båda sidorna om likhetstecknet ger

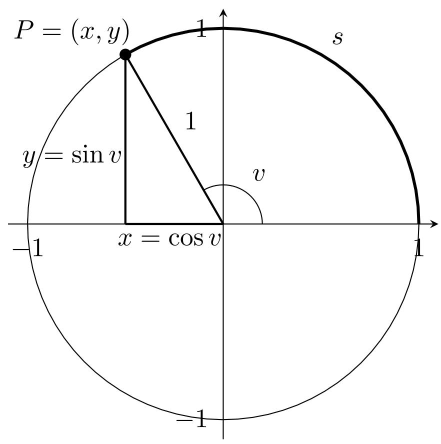
$$x = \frac{\tan 60^\circ}{2}. \qquad \square$$

För att kunna *beräkna* x måste vi veta värdet på $\tan 60^\circ$, vilket enligt definitionen alltså ges av kvoten av kateterna i någon rätvinklig triangel med en vinkel 60°. Vi kommer strax att beräkna värden för sinus, cosinus och tangens för vissa standardvinklar, bland annat 60°. Men först ska vi studera vinklar mer allmänt.

3.5.2. Vinkelbegreppet

Vi har just stött på en nittiogradersvinkel och en sextiogradersvinkel och har alltså mätt vinklarna i grader. Men hur definieras en vinkel egentligen? Och kan man mäta vinklar i andra enheter än grader?

För att ge en god definition introducerar vi *enhetscirkeln* och begreppet *radianer*. Enhetscirkeln är en cirkel med medelpunkt i origo och radie 1, i något koordinatsystem. Vi påminner om att en cirkel med radie r har omkrets $2\pi r$, så enhetscirkeln har omkrets 2π. Ta nu en godtycklig rät linje som utgår från origo. Linjen kommer att skära cirkeln i en punkt P. Vinkeln mellan den positiva x-axeln och linjen, mätt i radianer, definieras som längden s längs cirkelbågen i moturs riktning från punkten $(1, 0)$ till P; se Figur 25. Radianer skrivs förkortat som rad, men när man använder radianer som vinkelmått utelämnar man ofta helt att skriva enheten.[§]



Figur 25: Vinkeln v är s radianer, där s är längden på enhetscirkelns cirkelbåge från x-axeln till P.

Exempel 3.5.2. Vinkeln i radianer mellan den positiva x-axeln och den positiva y-axeln, alltså motsvarande 90°, ges av längden av cirkelbågen mellan punkten $(0, 1)$ och $(1, 0)$. Denna är en fjärdedel av cirkelns omkrets så vinkeln är alltså $2\pi/4 = \pi/2$ radianer.

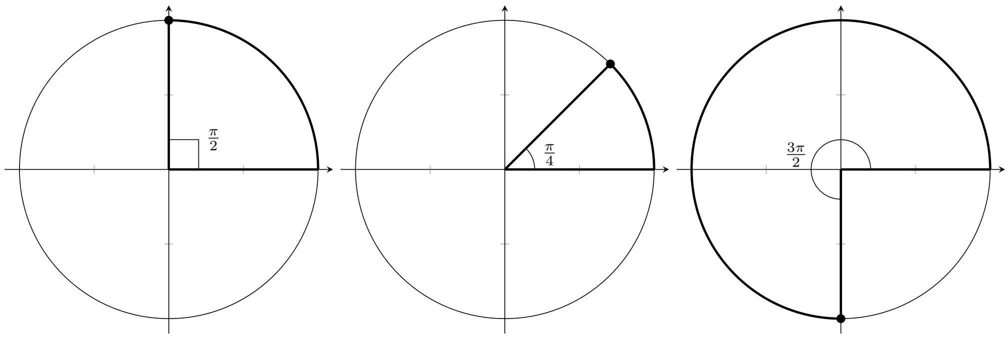
Vinkeln 45° motsvarar en åttondels varv. Mätt i radianer är denna vinkel en åttondel av enhetscirkelns omkrets, det vill säga $2\pi/8 = \pi/4$.

Vinkeln mellan x-axeln och linjen genom punkten $(0, -1)$ är $2\pi \cdot 3/4 = 3\pi/2$ radianer eftersom längden på enhetscirkelns cirkelbåge från $(1, 0)$ till $(0, -1)$ utgör tre fjärdedelar av cirkelns omkrets. Vinklarna illustreras i Figur 26.

Mer allmänt gäller förstås att $2\pi \,\text{rad} = 360^\circ$, vilket vid division med 360 respektive med 2π ger följande samband:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \quad \text{och} \quad 1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

[§]Det logiska i detta följer av att radien är 1 längdenhet och definitionen av vinkelns storlek kan lika gärna ges som kvoten av cirkelbågens längd med radiens längd, vilket ger ett tal utan enhet.



Figur 26: Enhetscirkeln och vinklarna $\pi/2$, $\pi/4$ och $3\pi/2$.

Exempel 3.5.3. Vi omvandlar 330° till radianer och 2 radianer till grader:

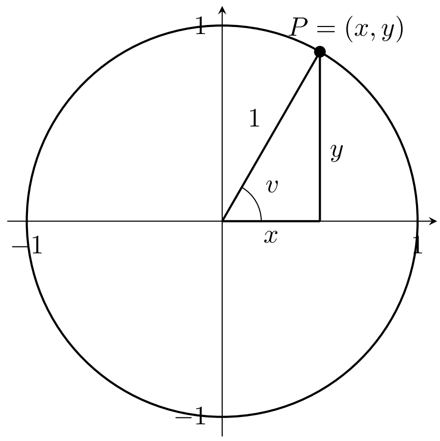
$$330° = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}\,\text{rad} \approx 5,76\,\text{rad}$$

$$2\,\text{rad} = 2 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx 115°.$$

Förhoppningsvis framgår från definitionen av vinklar med hjälp av enhetscirkeln att radianer är en mer naturlig enhet än den godtyckliga indelningen av en cirkel i 360 delar. När vi så småningom kommer till derivata är det viktigt att använda radianer. Bilden vi får av vinklar i enhetscirkeln ger mycket mer än så och i nästa avsnitt ska vi se hur enkelt sinus och cosinus kan tolkas i enhetscirkeln.

3.5.3. Trigonometri i enhetscirkeln

Varje punkt $P = (x, y)$ på enhetscirkeln i första kvadranten (där både x och y är positiva) formar en rätvinklig triangel så som visas i Figur 27. Hypotenusan har längd ett och kateternas längder



Figur 27: En punkt $P = (x, y)$ och motsvarande triangel i första kvadranten av enhetscirkeln.

ges av koordinaterna x och y. Vinkeln v ligger mellan 0 och $\pi/2$ (mellan 0° och 90°). Enligt tidigare definitioner av tangens, cosinus och sinus gäller

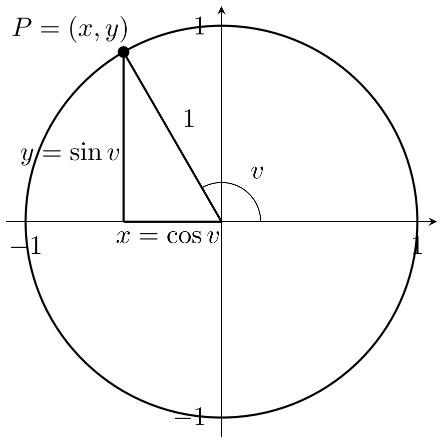
$$\tan v = \frac{y}{x}\ , \quad \sin v = \frac{y}{1} = y \quad \text{och} \quad \cos v = \frac{x}{1} = x\ .$$

Vi noterar här att

$$\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

Vi kan alltså tolka cosinus av vinkeln v som x-koordinaten för punkten, och sinus av vinkeln som y-koordinaten för punkten. Denna tolkning används som definition av cosinus och sinus även för vinklar som inte ligger mellan 0 och $\pi/2$.

Definition 10. Låt v vara en vinkel och låt l vara den linje som vridits vinkeln v från x-axeln. Vridningar moturs motsvarar positiva vinklar och medurs motsvarar negativa vinklar. Då är $\cos v$ lika med x-koordinaten för den punkt där l skär enhetscirkeln, $\sin v$ är lika med y-koordinaten för samma punkt och $\tan v = \sin v/\cos v$ för de vinklar med $\cos v \neq 0$.



Figur 28: Illustration av definitionen av sinus och cosinus för en vinkel v. Punkten P har koordinaterna $(x, y) = (\cos v, \sin v)$.

En vridning av linjen l moturs eller medurs t.ex. 25° ger förstås en lika stor cirkelsektor (”tårtbit”). I många sammanhang när man talar om vinklar är man bara intresserad av storleken, men ofta är det även meningsfullt att ”räkna vinklar med tecken”. Notera att när vi nu talar om vinklar som motsvarande en vridning finns det inte heller längre någon anledning att begränsa sig till vinklar som är mindre än ett helt varv, alltså 2π radianer. Detta återkommer vi till i Avsnitt 3.5.6.

Eftersom P ligger på enhetscirkeln så är x- och y-koordinaterna, alltså cosinus- och sinusvärden, alltid i intervallet $[-1, 1]$. Men tangens då? Notera att tangensvärdet y/x helt enkelt är detsamma som riktningskoefficienten för linjen l. Linjen kan luta åt alla håll så tangens kan anta alla värden (men när l är vertikal, det vill säga för vinklarna $\pm\pi/2$, är tangens inte definierat.)

3.5.4. Standardvinklar

Låt oss nu bestämma sinus- och cosinusvärdena för några speciella vinklar. Vi väljer att arbeta i radianer, men kommer att presentera sinus- och cosinusvärdena för standardvinklarna i en tabell där vi även ger vinklarna mätta i grader.

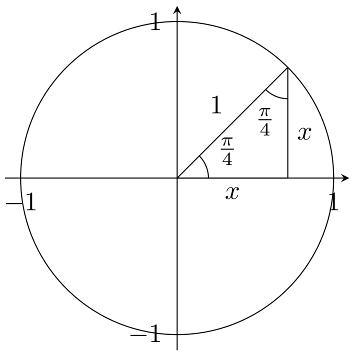
Vi börjar med ett par vinklar som inte kräver någon räkning alls. Vinkeln 0 motsvaras av att linjen l sammanfaller med x-axeln så att skärningspunkten med enhetscirkeln helt enkelt har x-koordinat 1 och y-koordinat 0. Alltså är $\cos 0 = 1$ och $\sin 0 = 0$. Det följer sedan att $\tan 0 = 0/1 = 0$. För vinkeln $\frac{\pi}{2}$, alltså ett kvarts varv, gäller ”det omvända”: Punkten är $(0, 1)$ så $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ och $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Tangens är dock inte definierat för denna vinkel eftersom vi omöjligt kan dividera med cosinusvärdet 0.

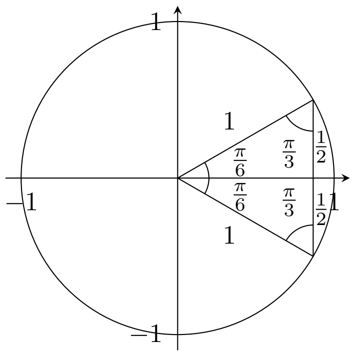
Låt oss nu undersöka vinkeln $\frac{\pi}{4}$. Vi ritar in vinkeln och en hjälptriangel i enhetscirkeln; se Figur 29(a). Eftersom vinkelsumman i en triangel är π radianer och vi har en vinkel på $\frac{\pi}{4}$ och en på $\frac{\pi}{2}$ måste även den sista vinkeln vara $\frac{\pi}{4}$. Det följer på grund av symmetri att de båda kateterna är lika långa.

Enligt Pythagoras sats är $x^2 + x^2 = 1$ så vi har att $x^2 = \frac{1}{2}$. Lösningarna till denna ekvation är $x = \pm 1/\sqrt{2}$, men eftersom x är en sträcka kan vi bortse från det negativa svaret. Kateterna i Figur 29(a) har alltså längden $1/\sqrt{2}$. Det innebär att skärningspunkten P har koordinaterna $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och vi har visat att

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Vi går nu vidare till vinklarna $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$. Vi utgår från en liksidig triangel, vilken därmed har alla vinklar lika stora, nämligen $\frac{\pi}{3}$. Med en linje som delar en vinkel mitt itu får vi en rätvinklig triangel med vinklarna $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ och $\frac{\pi}{6}$, se Figur 29(b). Om den liksida triangeln har sidlängd 1 är den korta katetens längd $\frac{1}{2}$.





Figur 29: (a) En likbent triangel där två av vinklarna är $\frac{\pi}{4}$. (b) En liksidig triangel som delats ger en triangel med vinklarna $\pi/3$ och $\pi/6$.

Vi kan med hjälp av Pythagoras sats ställa upp en ekvation för den obekanta sidan. Det gäller att

$$x^2 + (1/2)^2 = 1^2,$$

vilket ger lösningarna

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Återigen kan vi bortse från det negativa värdet eftersom vi söker en sträcka. Genom att använda att sinus definieras som förhållandet mellan motstående katet och hypotenusan får vi att

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

På motsvarande sätt kan vi genom att använda att cosinus definieras som förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusan få att

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\Big/1 = \frac{1}{2}.$$

Slutligen kan vi bestämma tangensvärdet som kvoten mellan sinus- och cosinusvärdet, det vill säga

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Figur 29(b) kan även användas för att bestämma de trigonometriska funktionernas värden för vinkeln $\pi/6$. Vi får

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\Big/1 = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\Big/\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi sammanfattar våra resultat i en tabell:

v (grader)	v (rad)	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	odefinierad.

Dessa trigonometriska värden behöver du kunna utan att använda tabell. Däremot är det inte att rekommendera att lägga tabellen på minnet. Det som håller bättre i längden är att kunna rita upp en enhetscirkel och påminna dig om vilka vinklar som är standardvinklar. Sedan kan en del värden enkelt läsas av och de andra finner man med hjälptrianglar eller så kommer man ihåg vilka olika tal som kan komma i fråga—det är ju inte så många.

Det finns knep för att bestämma exakta trigonometriska värden för fler vinklar än dessa, men de kräver mer arbete. För de flesta vinklar tar man alltså oftast till en räknare för att bestämma närmevärden för sinus, cosinus och tangens.

Exempel 3.5.4. I en likbent triangel bildar de två lika långa sidorna vinkeln 30° med den tredje sidan som är 5 cm lång. Vilken är längden på de två lika långa sidorna?

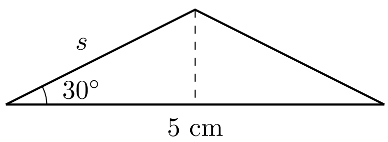
Lösningsförslag. Om vi delar den likbenta triangeln mitt itu med en ”höjd” mot sidan med längd 5 cm, som i Figur 30 får vi två räta trianglar med ena kateten $\frac{5}{2}$ cm lång. Vi söker hypotenusan s och använder att

$$\cos 30° = \frac{5/2}{s}.$$

Med $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ får vi

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2s} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

De två lika långa sidorna har längden $5/\sqrt{3}$ cm. □



Figur 30: Den likbenta triangeln delad till två rätvinkliga.

3.5.5. Samband mellan cosinus och sinus för olika vinklar

Vi har i det föregående avsnittet utnyttjat Pythagoras sats för ett par rätvinkliga trianglar i enhetscirkeln. Mer allmänt ger Pythagoras sats ett mycket användbart trigonometriskt samband. Låt $P = (x, y)$ ligga på enhetscirkeln. Till punkten $P = (x, y)$ kan vi associera en rätvinklig triangel så som i Figur 27. Kateternas längder är $|x|$ och $|y|$, där vi med absolutbeloppet försäkrat oss om att det blir rätt även om P inte ligger i första kvadranten. Pythagoras sats ger

$$|x|^2 + |y|^2 = 1.$$

Men här behövs inte absolutbeloppen längre eftersom kvadraterna ändå är positiva. Eftersom $x = \cos v$ och $y = \sin v$ får vi sambandet

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Detta är en viktig identitet kallad *trigonometriska ettan*. Observera konventionen att skriva $\cos^2 v$ och $\sin^2 v$ istället för $(\cos v)^2$ och $(\sin v)^2$.

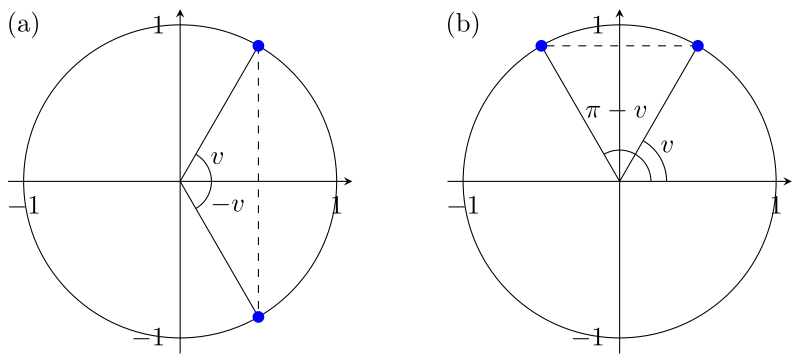
Vi ritar nu in vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln för att söka samband mellan deras sinus- och cosinusvärden i Figur 31(a). Eftersom cosinus för en vinkel ges av x-koordinaten för motsvarande punkt på enhetscirkeln ser vi genast att

$$\cos(-v) = \cos(v).$$

Om vi jämför y-koordinaterna ser vi att de— på grund av symmetrin—endast skiljer med ett tecken, alltså är

$$\sin(-v) = -\sin(v).$$

Ännu ett användbart samband mellan sinus- och cosinusvärden är lätt att reda ut med hjälp av symmetri i enhetscirkeln. Det är för vinklarna v och $\pi - v$. Vi ritar in en godtycklig vinkel v i enhetscirkeln, samt vinkeln $\pi - v$, som i Figur 31(b). De motsvarande punkterna på enhetscirkeln



Figur 31: (a) Illustration av sambanden $\cos v = \cos(-v)$ och $\sin v = -\sin(-v)$. (b) Illustration av sambanden $\sin v = \sin(\pi - v)$ och $\cos v = -\cos(\pi - v)$.

har uppenbarligen samma y-koordinat, vilket innebär att de har samma sinusvärde:

$$\sin(\pi - v) = \sin(v).$$

Med hänvisning till symmetrin ser vi att dessa punkters x-koordinater endast skiljer med ett tecken, så att

$$\cos(\pi - v) = -\cos(v).$$

Sammanfattningsvis har vi följande likheter:

$$\begin{aligned}
\cos v &= \cos(-v) \\
\sin v &= -\sin(-v) \\
\cos v &= -\cos(\pi - v) \qquad (\text{eller } \cos v = -\cos(180^\circ - v)) \\
\sin v &= \sin(\pi - v) \qquad (\text{eller } \sin v = \sin(180^\circ - v)).
\end{aligned}$$

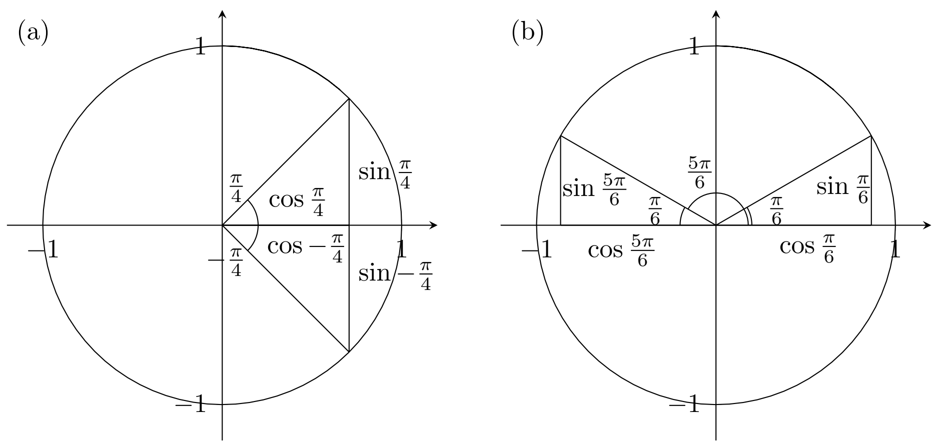
Dessa likheter tillsammans med $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ behöver du bli väl bekant med. Men att komma ihåg dem som formler behövs inte, eftersom man snabbt kan se sambanden med hjälp av en figur, så som vi just gjort.

Genom att kombinera dessa samband och det vi vet om standardvinklarna kan vi bestämma exakta värden för sinus, cosinus och tangens för 16 olika vinklar, vilka alla är på formen $\frac{n\pi}{4}$ eller $\frac{n\pi}{6}$ för heltal n.

Exempel 3.5.5. Bestäm $\sin(-\pi/4)$ och $\cos(-\pi/4)$.

Lösningsförslag. Med hjälp av Figur 32(a) ser vi att de trigonometriska värdena för vinkeln $-\pi/4$ är desamma som värdena för vinkeln $\pi/4$ förutom att sinusvärdet ska vara negativt. Vi har alltså att

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \square$$



Figur 32: Skisser som hjälper oss att relatera vinklarna (a) $-\frac{\pi}{4}$ och (b) $\frac{5\pi}{6}$ till standard-vinklar i första kvadranten.

Exempel 3.5.6. Bestäm $\sin(5\pi/6)$ och $\cos(5\pi/6)$.

Lösningsförslag. Med hjälp av Figur 32(b) ser vi att de trigonometriska värdena för vinkeln $5\pi/6$ är desamma som värdena för vinkeln $\pi/6$ förutom att cosinusvärdet ska vara negativt. Mer formellt kan vi först notera att $5\pi/6 = \pi - \pi/6$ och får då

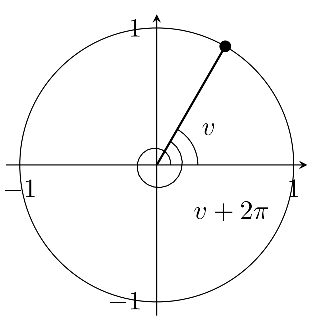
$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

3.5.6. Trigonometriska funktioner

Hittills har vi ägnat oss åt vinklar i intervallet $[0, 2\pi]$, eller $[0°, 360°]$, samt deras negativa motsvarigheter. Vi har definierat cosinus och sinus för dessa vinklar och beräknat deras värden för ett antal olika vinklar. Med tolkningen av en vinkel som resultatet av en vridning, så som det beskrivs i Avsnitt 3.5.3, är det dock naturligt att låta vinklar kunna bli både större än 2π och mindre än -2π, eftersom en vridning kan vara mer än ett varv.

Definition 10 för de trigonometriska värdena gäller för *alla* vinklar: oavsett hur stor vinkeln v är gäller att för punkten $P = (x, y)$ på enhetscirkeln så är $\sin v = y$ och $\cos v = x$. Vrider vi ett varv till, det vill säga adderar vinkeln 2π, så är vi åter i samma punkt. Därför är värdena för sinus respektive cosinus lika med y respektive x även för vinkeln $v + 2\pi$.

Detta illustreras i Figur 33.



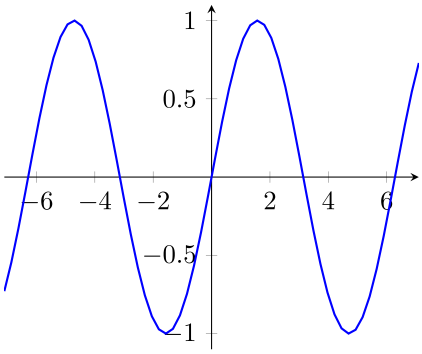
Figur 33: I bilden ser vi en vinkel v samt vinkeln $v + 2\pi$. Dessa vinklar har samma sinus- och cosinus-värden.

Tänk dig exempelvis att du springer på en löparbana med formen av en cirkel. När du sprungit ett varv är du alltid tillbaka på samma ställe som du började. På samma sätt kommer du tillbaka till samma ställe om du springer 10 varv, oavsett om du springer motsols eller medsols. Vi får följande trigonometriska samband:

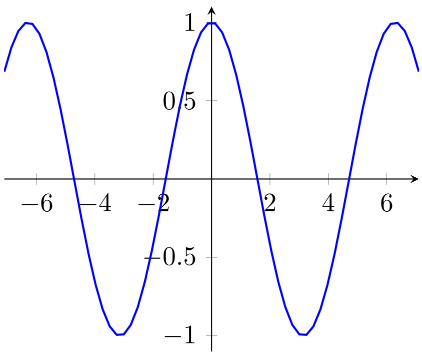
$$\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$$
$$\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi),$$

där n är ett heltal (som alltså både kan vara negativt och positivt) som anger antalet varv.

Vi ska nu betrakta sinus och cosinus som funktioner. Definitionsmängderna är alla reella tal, $\mathbb{R}$, och deras värdemängder är intervallet $[-1, 1]$. Sinus och cosinus är *periodiska funktioner* med perioden 2π (eller $360°$), eftersom de alltid återkommer till samma värde om vinkeln ökar med 2π. Graferna för funktionerna $\sin v$ och $\cos v$ visas i Figur 34 och i Figur 35. På grund av periodiciteten upprepas kurvornas utseende om och om igen.



Figur 34: Grafen till funktionen $f(v) = \sin v$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.



Figur 35: Grafen till funktionen $f(v) = \cos v$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

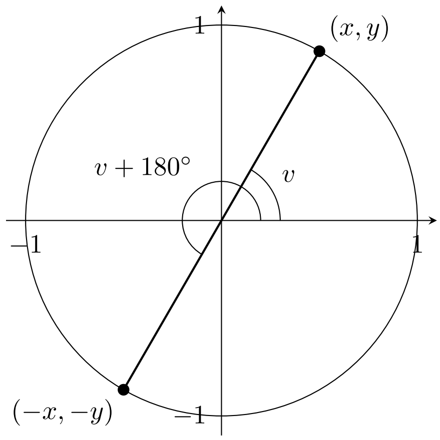
När sinus och cosinus betraktas som funktioner är det vanligt att variabeln benämns x och värdet y, precis som man brukar sätta $y = f(x)$. Var uppmärksam på att dessa x och y i så fall inte motsvarar koordinaterna för en punkt på enhetscirkeln, utan att x i det sammanhanget står för det som tidigare var vinkeln.

Med hjälp av Figur 36 får vi följande samband:

$$\sin(v + \pi) = -\sin v$$
$$\cos(v + \pi) = -\cos v$$

Från dessa likheter kan vi bestämma perioden för tangens-funktionen. Vi får att

$$\tan(v + \pi) = \frac{\sin(v + \pi)}{\cos(v + \pi)} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v.$$



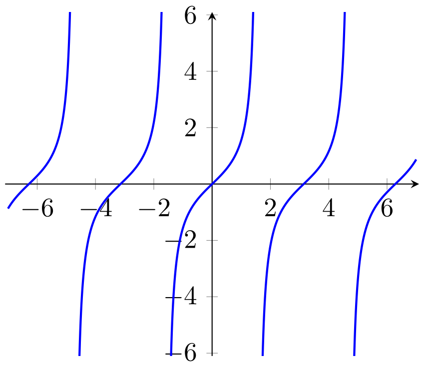
Figur 36: Illustration av sambanden $\sin(v + \pi) = -\sin(v)$ och $\cos(v + \pi) = -\cos(v)$.

Detta innebär att tangens är periodisk med perioden π och alltså gäller

$$\tan(v + n \cdot \pi) = \tan v,$$

för heltal n (n motsvarar här antal *halva* varv som läggs till). Detta stämmer med tolkningen av tangensvärdet som lutningen av den linje som vridits vinkeln v: vrider man en linje ett halvt varv till har den åter samma lutning.

Tangens definitionsmängd är hela $\mathbb{R}$ utom punkterna $\frac{\pi}{2} + k\pi$, för alla heltal k. (Tänk efter varför det blir så.) Grafen till tangensfunktionen visas i Figur 37.



Figur 37: Grafen till funktionen $f(v) = \tan v$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ minus punkterna $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ och $5\pi/2$ där $\tan v$ är odefinierad.

Vi ger exempel på hur ett par av sambanden i detta avsnitt kan användas för beräkning. Med risk för att vara tjatig, till varje exempel rekommenderas att du ritar en figur där du kan se hur vinklarna som används, och deras trigonometriska värden, relaterar till varandra. Har man först en figur är det mycket lättare att skriva ner vilket samband man behöver använda.

Exempel 3.5.7. Beräkna $\cos(55\pi/3)$.

Lösningsförslag. Notera först att $55\pi/3 = 18\pi + \pi/3$. Eftersom 18π motsvarar 9 hela varv har vi

$$\cos \frac{55\pi}{3} = \cos\left(18\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Exempel 3.5.8. Beräkna $\sin 225°$.

Lösningsförslag. Vi har

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

eftersom $\sin(180^\circ + v) = -\sin v$. □

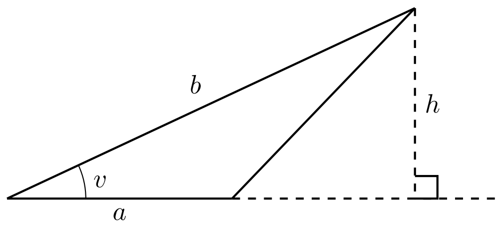
De trigonometriska funktionerna är kolossalt användbara. Att de anger lägen vid rotationer och att vågor kan beskrivas med sinuskurvor borde vara uppenbart från definitionen och graferna. Sinuskurvan

$$f(t) = A\sin(\omega t)$$

sägs ha amplitud A och vinkelfrekvens ω; t står ofta för tid vinkeln ($v = \omega t$ och perioden $T = 2\pi/\omega$). Till exempel ges spänningen från ett vanligt vägguttag av $U(t) = 325\sin(50 \cdot 2\pi t)$ volt. Även mer godtyckliga periodiska funktioner kan beskrivas med hjälp av sinus- och cosinusfunktioner. Inom fourieranalys behandlar man hur kontinuerliga periodiska funktioner kan approximeras godtyckligt bra om man summerar tillräckligt många sinus- och cosinusfunktioner, med olika amplituder och vinkelfrekvenser.

3.5.7. Trigonometriska identiteter

Vi kan enkelt räkna ut arean av en triangel med två sidor och den mellanliggande vinkeln. Låt v vara en vinkel i en triangel och låt a och b vara de två sidor som bildar denna vinkel, som i Figur 38. Triangelns höjd, h uppfyller att $h/b = \sin v$, så $h = b\sin v$. Triangelns area är alltså



Figur 38: Triangel med två sidor a och b och mellanliggande vinkel v.

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sin v. \tag{3.5.1}$$

En liknande figur kan vi rita om v är en trubbig vinkel och samma formel gäller.

Vi är nu redo att bevisa följande viktiga identiteter. Dessa kallas för *additionsformlerna* för sinus och cosinus, och säger att

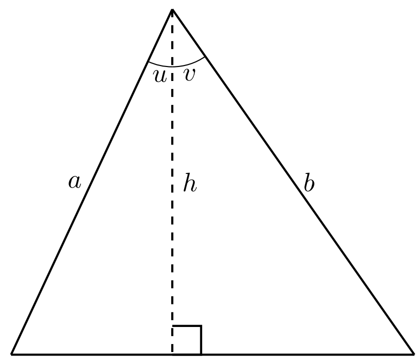
$$\sin(v + w) = \sin v \cos w + \cos v \sin w$$
$$\cos(v + w) = \cos v \cos w - \sin v \sin w.$$

Vi bevisar endast den första formeln, eftersom den andra kan bevisas på liknande sätt. Betrakta triangeln i Figur 39 där v och w är inritade. Vi delar triangeln i två delar med en höjd h som bildar en rät vinkel med basen. Triangelns area beräknas på två olika sätt: Enligt (3.5.1) är arean lika med $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sin(v + w)$. Den vänstra och den högra triangeln har areorna

$$\frac{ah\sin(v)}{2} \quad \text{och} \quad \frac{bh\sin(w)}{2}.$$

Summan av dessa areor är lika med triangelns area, så att

$$\frac{ab\sin(v + w)}{2} = \frac{ah\sin(v)}{2} + \frac{bh\sin(w)}{2}. \tag{3.5.2}$$



Figur 39: En triangel med en höjd inritad som delar triangeln i två delar.

Samtidigt är de två deltrianglarna rätvinkliga, så vi vet att

$$\frac{h}{a} = \cos(v), \quad \frac{h}{b} = \cos(w).$$

Detta ger att $h = a\cos(v)$ och $h = b\cos(w)$. Använder vi detta i högerledet i (3.5.2) och multiplicerar båda sidor med 2, får vi

$$a \cdot b \sin(v + w) = ab\cos(w)\sin(v) + ab\cos(v)\sin(w).$$

Delar vi båda sidor med $a \cdot b$ så får vi den första additionsformeln.

Ett viktigt specialfall av additionsformlerna är när $w = v$. Då får vi att

$$\begin{aligned}\sin(2v) &= 2\sin v\cos v\\ \cos(2v) &= \cos^2 v - \sin^2 v.\end{aligned}$$

Dessa kallas för *dubbelvinkel-formlerna*. Genom att använda den trigonometriska ettan kan vi skriva om $\cos(2v)$ på två andra sätt:

$$\begin{aligned}\cos(2v) &= 1 - 2\sin^2 v\\ \cos(2v) &= 2\cos^2 v - 1.\end{aligned}$$

Dessa tre olika uttryck för $\cos(2v)$ kan vara användbara i olika sammanhang, så det är bra att känna till alla tre.

3.5.8. Trigonometriska ekvationer

När man löser trigonometriska ekvationer är det mycket viktigt att komma ihåg trigonometriska samband och de trigonometriska funktionernas periodicitet.

Exempel 3.5.9. Bestäm samtliga lösningar till $\sin v = \frac{1}{2}$. Svara både i grader och i radianer.

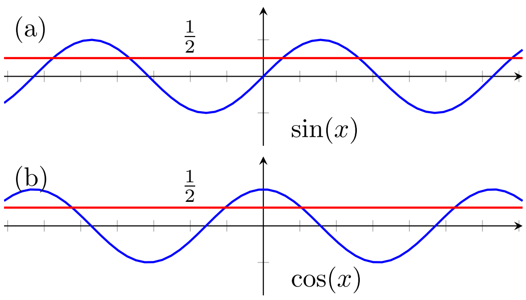
Lösningsförslag. Vi utför räkningarna i radianer och omvandlar sedan resultatet till grader. För att bestämma samtliga lösningar är det mycket att tänka på. Figur 40(a) ger ledning. Först måste vi bestämma någon vinkel v som uppfyller $\sin v = \frac{1}{2}$. En sådan vinkel är $\pi/6$, eftersom vi vet att sinusvärdet $1/2$ fås av denna standardvinkel. Vi måste också komma ihåg att $\sin v = \sin(\pi - v)$ vilket innebär att även $v = 5\pi/6$ är en lösning till ekvationen. Slutligen får vi inte glömma att $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$, där n är ett heltal. Alltså får vi att samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{och} \quad \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

vilket är

$$30^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{och} \quad 150^\circ + n \cdot 360^\circ, \quad n \in \mathbb{Z},$$

uttryckt i grader. $\square$



Figur 40: Vägledning för att lösa ekvationerna (a) $\sin v = 1/2$ och (b) $\cos v = 1/2$.

Exemplet visar hur trigonometriska ekvationer kan ha oändligt antal lösningar på grund av deras periodicitet. Har man grafen i Figur 34 i åtanke är det uppenbart att en horisontell linje på höjden $1/2$ skär kurvan i oändligt många punkter.

Exempel 3.5.10. Hur många lösningar har ekvationen $\cos v = \frac{1}{2}$ i intervallet $[\pi, 3\pi]$?

Lösningsförslag. Standardvinkeln $\pi/3$ ger cosinusvärdet $1/2$. Eftersom $\cos v = \cos(-v)$ så är även $-\pi/3$ en lösning. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Jämför gärna med Figur 40(b). Om $n = 1$ ger det oss lösningarna $\pi/3 + 2\pi$ och $2\pi - \pi/3$, vilka ligger i det aktuella intervallet. Om $n \leq 0$ eller $n \geq 2$ så hamnar lösningarna utanför intervallet. Antalet lösningar är därför 2. $\square$

Exempel 3.5.11. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos^2 v - \dfrac{3\cos v}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$.

Lösningsförslag. Vi börjar med att sätta $y = \cos v$. Detta ger oss ekvationen

$$y^2 - \frac{3y}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

som har lösningarna $y = 1/2$ och $y = 1$. Från den föregående uppgiften vet vi att $\cos v = 1/2$ har lösningarna $\pm\pi/3 + 2n\pi$, för alla heltal n. Ekvationen $\cos v = 1$ har lösningarna $v = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Lösningarna till den ursprungliga ekvationen ges alltså av

$$v = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ och } v = 2n\pi \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$ $\square$

3.5.9. Polär framställning av komplexa tal

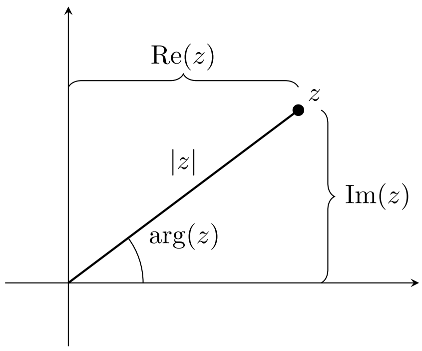
Tidigare har vi lärt oss att ange komplexa tal på formen $a + bi$ och representera talet med punkten (a, b). Vi kommer nu att införa något som kallas *polära koordinater* för att ange komplexa tal. De polära koordinaterna bygger på att man anger hur långt från origo punkten ligger samt i vilken riktning.

Låt $z = a + bi$. I det första kapitlet införde vi beteckningen $\bar{z}$ för det komplexa talet $a - bi$ och vi såg att $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ genom att använda konjugatregeln. Vi definierar nu *absolutbeloppet* av det komplexa talet z som

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observera att om $b = 0$ så överensstämmer definitionen med absolutbeloppet för reella tal. I det komplexa talplanet representerar talet $r = |z|$ avståndet från origo till punkten (a, b).

Argumentet till z, betecknat $\arg(z)$, är vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten (a, b), se Figur 41.



Figur 41: Ett komplext tal z med $|z|$ och $\arg(z)$ utmarkerade.

Med den trigonometri vi lärt oss ges x-koordinaten för det komplexa talet $z = a + bi$ av $a = r\cos(\arg z)$ och y-koordinaten av $b = r\sin(\arg z)$. Det komplexa talet $z = a + bi$ kan därför skrivas på så kallad *polär form* som

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg z$. Specialfallet när $r = 1$ ger en punkt (a, b) på enhetscirkeln.

Exempel 3.5.12. Bestäm absolutbelopp och argument för de komplexa talen $z = 1 + i$ och $w = -3\sqrt{3} + 3i$. Vi har att

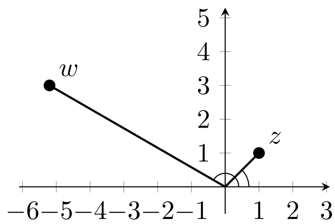
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|w| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = 6.$$

Vi har att $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ eftersom vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten $(1, 1)$ är $\pi/4$.

Punkten w ligger i den andra kvadranten. Om $\theta = \arg(w)$ måste det gälla att

$$\sin(\theta) = \frac{3}{6} \text{ och } \cos(\theta) = \frac{-3\sqrt{3}}{6}.$$

Detta leder till att $\theta = \frac{5\pi}{6}$.



Figur 42: Punkten $z = 1 + i$ samt $w = -3 + 4i$ i det komplexa talplanet.

Exempel 3.5.13. Det komplexa talet $z = 3 - 3i$ kan skrivas på formen $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Bestäm r och θ.

Lösningsförslag. Vi börjar med att beräkna absolutbeloppet av z och får

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

Vinkeln från origo till punkten $(3, -3)$ är $\frac{7\pi}{4}$. Det komplexa talet z kan alltså skrivas som

$$3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

på polär form. Vi ser att $r = 3\sqrt{2}$ och att $\theta = \frac{7\pi}{4}$. □

Övningar 3.5

1. Visa att $\sin(90° - v) = \cos(v)$ och $\cos(90° - v) = \sin(v)$. *Ledning:* Rita en rätvinklig triangel med en vinkel v och en vinkel $90° - v$.
2. Beräkna följande värden:
$$\text{(a): } \sin(-30°), \quad \text{(b): } \sin(420°), \quad \text{(c): } \cos(-720°).$$
3. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos^2(v) = \frac{1}{2}$. Ange svaret i grader och även i radianer.
4. Beräkna följande värden:
$$\text{(a): } \sin\frac{\pi}{6}, \quad \text{(b): } \sin\frac{23\pi}{4}, \quad \text{(c): } \cos\frac{51\pi}{6}.$$
5. Lös ekvationen $4\sin^2 x = 3$. Svara i radianer.
6. Bestäm värdemängden V_f till funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av $f(x) = 2 + 3\sin(\pi x/2)$.
7. Skriv följande komplexa tal på polär form:
$$1 + i, \qquad 1 - i, \qquad 3i, \qquad \frac{-i}{2}.$$

3.6. Gränsvärden

Gränsvärden säger något om hur funktioner uppför sig då variabelns värde är stort och blir större och större, eller hur funktioner beter sig nära punkter där de inte är definierade. Vi ska här bekanta oss lite grann med gränsvärdesbegreppet, framförallt för att gränsvärden används då vi strax ska definiera derivata. I högskolans grundkurser i analys behandlas gränsvärden mer rigoröst.

3.6.1. Gränsvärde då x går mot oändligheten

I Avsnitt 3.3.2 studerade vi polynomet $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$, vars graf visas i Figur 18. Vi konstaterade att om x blir ett tillräckligt stort tal så blir $g(x)$ hur stort som helst—gränsvärdet för funktionen är oändligheten.[¶] Detta skrivs

$$g(x) \to \infty \quad \text{då} \quad x \to \infty,$$

[¶]Eftersom oändligheten inte är ett tal kallas sådana gränsvärden ibland för oegentliga.

och utläses ”$g(x)$ går mot oändligheten då x går mot oändligheten”. Det gäller även att $g(x)$ blir hur stort som helst om x antar tillräckligt stora negativa värden, alltså

$$g(x) \to \infty \quad \text{då} \quad x \to -\infty.$$

En annan beteckning (där vi nu valt att inkludera båda gränsvärdena med hjälp av ett $\pm$) är

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \infty.$$

Detta läses ”limes av $g(x)$ då x går mot plus minus oändligheten är lika med oändligheten”. Limes betyder gräns. Notera att oändligheten inte är ett tal, så lika-med-tecknet här betyder inte detsamma som det brukar göra; skrivsättet är smidigt så vi tillåter oss att använda det ändå.

Betrakta nu den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Först och främst kan vi dra slutsatsen att funktionen är definierad över hela $\mathbb{R}$ eftersom nämnaren $x^2 + 1$ aldrig kan vara lika med noll. Hur uppför sig då funktionen? Vi kan notera att

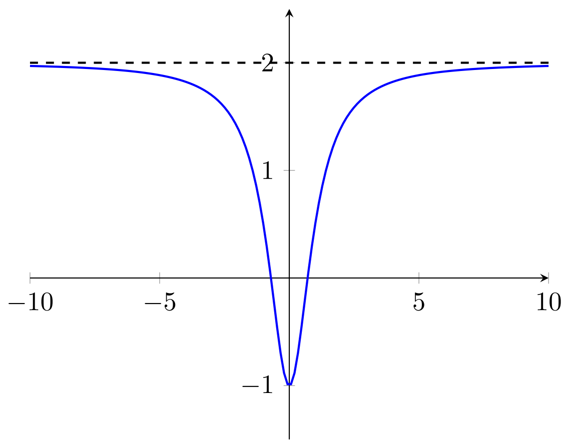
$$f(-a) = \frac{2(-a)^2 - 1}{(-a)^2 + 1} = \frac{2a^2 - 1}{a^2 + 1} = f(a)$$

för alla reella tal a. Det innebär att grafen till f är symmetrisk kring $x = 0$.

Låt oss studera $f(x)$ för några värden på x. Av symmetriskäl räcker det att titta på positiva värden. Vi har:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{31}{17}$	$\frac{49}{26}$	$\frac{71}{37}$	$\frac{97}{50}$

Vi noterar att $f(x)$ ökar då x ökar men att alla värden är mindre än två. I Figur 43 är grafen samt linjen $y = 2$ utritade. Det verkar som att $f(x)$ närmar sig värdet 2 då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.



Figur 43: Grafen till $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ i intervallet $[-10, 10]$.

Låt oss ge ett bevis för detta med hjälp av en omskrivning. Vi börjar med att förkorta med x^2, vilket är tillåtet när vi inte är intresserade av funktionens värde i $x = 0$. Vi får

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\frac{2x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Gränsvärdet av $\frac{1}{x^2}$ är noll, ty delar man 1 med ett mycket stort tal får man något mycket litet. Det gäller alltså att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2 \quad \text{och} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2.$$

Att funktionens gränsvärde är 2 innebär att funktionsvärdet $f(x)$ kan bli hur nära 2 som helst om bara x är tillräckligt stort, men funktionen antar aldrig värdet 2.

Inte alla funktioner har gränsvärden då $x \to \infty$. Till exempel så saknar de trigonometriska funktionerna gränsvärde då $x \to \infty$. Varken sinus eller cosinus har gränsvärde eftersom de fortsätter att variera mellan -1 och 1 då variabeln x ökar obegränsat.

3.6.2. Gränsvärde då x går mot en konstant

Låt $f(x)$ vara en funktion som inte är definierad i punkten $x = a$. Vi är intresserade av vad som händer när x ligger allt närmare a. Vi säger att funktionen har gränsvärdet A om funktionsvärdet $f(x)$ kan komma hur nära talet A som helst, om man tar värden på x som ligger tillräckligt nära a. När detta gäller skriver vi

$$f(x) \to A \quad \text{då} \quad x \to a \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

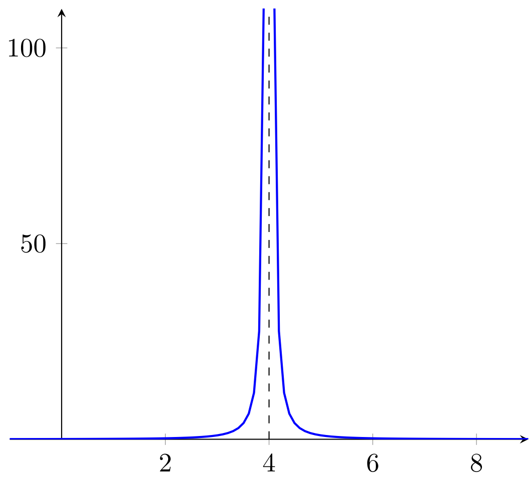
Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$$

är inte definierad när $x = 4$. Vad gäller då x närmar sig 4? Till exempel är $f(4.01) = \frac{1}{0.01^2} = 10\,000$ och vi ser att om x är ännu närmre 4 så kommer $g(x)$ bli ännu större. Detsamma gäller om vi tar värden på x som är lite mindre än 4; $f(3.99)$ är också lika med $10\,000$. Funktionen växer obegränsat då x går mot 4. Vi konstaterar att

$$g(x) \to \infty \quad \text{då} \quad x \to 4.$$

Figur 44 visar en del av grafen och dess asymptot i $x = 4$.



Figur 44: Grafen till $g(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$. När $x = 4$ är funktionen inte definierad. Då x går mot 4 går funktionen mot oändligheten.

I Avsnitt 3.3.3 betraktades den rationella funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, som inte är definierad i $x = -1$. Den har ett lite liknande beteende som $g(x)$. Figur 19 visar hur grafen har en asymptot i $x = -1$. Det saknas gränsvärde då $x \to -1$ eftersom funktionen antar stora negativa värden till vänster om denna punkt men mycket stora positiva till höger. (Ibland talar man då om höger- och vänstergränsvärden.)

Vi ska undersöka ännu en rationell funktion, nämligen

$$h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2}.$$

Eftersom nämnaren är noll när $x = 2$ så är h odefinierad i den punkten. Vi ska nu beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 2} h(x).$$

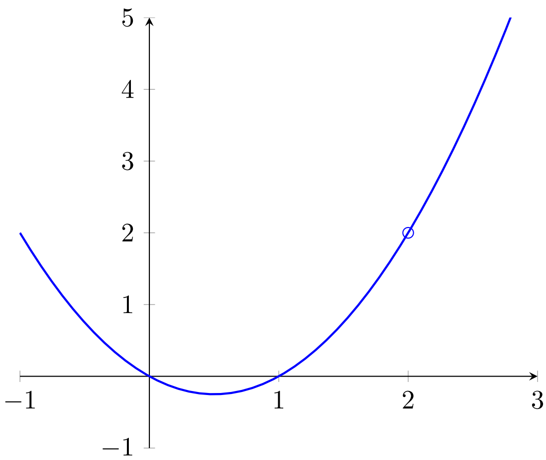
Vid en första anblick skulle man kunna tro att funktionen, på samma sätt som i de två fallen ovan, blir mycket stor positiv eller negativ nära $x = 2$. Men här är täljaren lite intressantare. Om vi faktoriserar den får vi $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$ och vi ser att även täljaren går mot noll då x går mot 2. Genom att förkorta har vi omskrivningen

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-2} = x(x-1),$$

under förutsättning att $x \neq 2$. Det betyder *inte* att $h(x)$ är lika med funktionen $g(x) = x(x-1)$, eftersom $g(x)$ är definierad för alla x, men när vi bestämmer gränsvärdet då x *går mot* 2 är det inga problem med att använda omskrivningen—den gäller för alla $x \neq 2$. Gränsvärdet är därmed

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} x(x-1) = 2 \cdot (2-1) = 2.$$

Grafen till $h(x)$ visas i Figur 45.

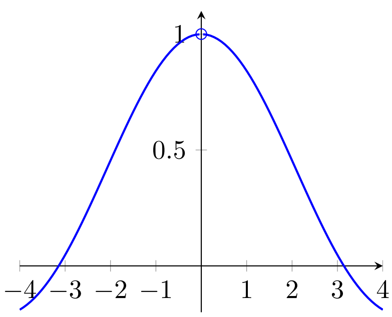


Figur 45: Grafen till $h(x) = \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}$, vilken sammanfaller med grafen för $p(x) = x(x-1) = x^2 - x$ i alla punkter utom $x = 2$. När $x = 2$ är $h(x)$ inte definierad. Då x går mot 2 går funktionen mot värdet 2.

Om resultatet i exemplet ovan, på grund av omskrivningen, kändes trivialt så är följande klassiska exempel kanske mer förvånande. Funktionen $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ är inte definierad i $x = 0$. När x går mot 0 så går både täljaren och nämnaren mot 0. Det visar sig att funktionens värde då närmar sig talet 1, det vill säga

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Grafen $y = \frac{\sin x}{x}$ visas i Figur 46.



Figur 46: Grafen till $y(x) = \frac{\sin x}{x}$. Gränsvärdet då x går mot 0 är 1.

De sista två exemplen, där det finns ett gränsvärde då x går mot punkten som inte hör till definitionsmängden, kan tyckas speciella och mycket lyckosamma. Så är det, men i själva verket är det just den typen av gränsvärden som dyker upp när man beräknar derivator.

3.6.3. Kontinuerlig funktion

Med hjälp av gränsvärdesbegreppet kan man definiera vad som menas med en *kontinuerlig funktion*. I denna text behöver vi inte ha koll på detaljer om kontinuitet men vi ska i alla fall presentera definitionen.

Även om en funktion $f(x)$ är definierad i en punkt a kan man ändå undersöka gränsvärdet då $x \to a$. Om detta gränsvärde är precis detsamma som värdet på funktionen i punkten a så säger man att f är kontinuerlig i a. Det innebär att funktionens graf hänger ihop vid a. När x närmar sig a så kommer funktionen närma sig värdet $f(a)$. Alltså:

Definition 11 (Kontinuerlig funktion)**.** Låt $f(x)$ vara en funktion som har ett gränsvärde då $x \to a$ och som är definierad i a. Då är funktionen $f(x)$ *kontinuerlig* i punkten a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Om en funktion är kontinuerlig i alla punkter i definitionsmängden säger man kort och gott att funktionen är kontinuerlig.

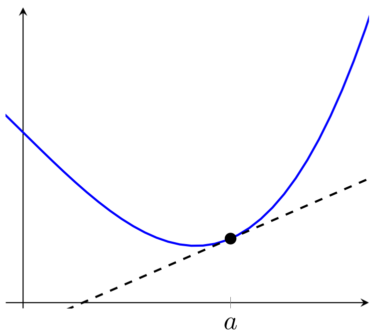
Kanske har du hört att grafen till en kontinuerlig funktion kan ritas utan att lyfta pennan. Men det behöver inte vara så. Till exempel så är funktionen $g(x)$, vars graf visas i Figur 44, kontinuerlig. Funktionen är inte definierad i $x = 4$, så vill man rita grafen måste man uppenbarligen lyfta pennan.

3.7. Derivata

Du känner säkert till att derivatan av en funktion i en punkt anger lutningen av funktionens graf i den punkten. Med andra ord berättar derivatan hur snabbt det förlopp som funktionen beskriver förändrar sig, alltså förändringshastigheten. När vi lärt oss beräkna derivatan av funktioner ska vi se hur vi med hjälp av derivata kan undersöka funktioners beteenden.

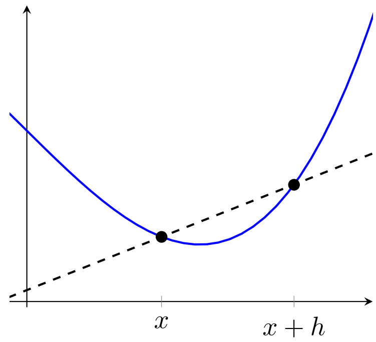
3.7.1. Derivatans definition

Om vi ritar grafen till en funktion $f(x)$ så kommer derivatan i en viss punkt a, att vara lutningen på den räta linje som *tangerar* kurvan i $(a, f(a))$. Vi kallar denna linje för *tangent* till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$, vilket illustreras med ett exempel i Figur 47.



Figur 47: Grafen till en funktion samt dess tangent (den räta linjen) i en punkt.

Men hur ska man matematiskt bestämma tangentens lutning? Vi gör det genom att först betrakta en *sekant*, det vill säga en linje som går genom två punkter på kurvan, och sedan låta avståndet mellan dessa två punkter krympa mot noll, så att sekanten alltmer närmar sig tangenten. Låt den ena punkten vara $(x, f(x))$ och den andra $(x + h, f(x + h))$; se Figur 48.



Figur 48: Sekant—den räta linjen genom punkterna $(x, f(x))$ och $(x+h, f(x+h))$.

Som vi tidigare använt (i Exempel 3.3.1) bestäms lutningen för en rät linje genom två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) av kvoten $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Sekantens lutning ges alltså av

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

För att få tangentens lutning låter vi parametern h (som kan vara både positiv och negativ) gå mot 0.

Definition 12 (Derivata)**.** Funktionen $f(x)$ är *deriverbar* (i punkten x) om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existerar ändligt. Detta gränsvärde kallas för *derivatan* av $f(x)$ och betecknas $f'(x)$.

Exempel 3.7.1. Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan av $f(x) = x^2$ är $f'(x) = 2x$.

Lösningsförslag. Enligt derivatans definition är

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Eftersom $f(x) = x^2$ så är

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2hx+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x+h.$$

När h närmar sig noll går $2x+h$ mot $2x$, så

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x,$$

vilket är precis vad vi skulle visa. □

Exempel 3.7.2. Bestäm derivatan av funktionen $g(x) = x^4+3x^2-1$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningsförslag. Enligt derivatans definition är

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Vi får genom insättning av vår funktion och algebraisk omskrivning att

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4+3x^2+6xh+3h^2-1)-(x^4+3x^2-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4+6xh+3h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3+6x+3h \\
&= 4x^3+6x,
\end{aligned}$$

eftersom termerna $6x^2h$, $4xh^2$, h^3 och $3h$ alla går mot noll då h går mot noll. □

Det finns flera sätt att beteckna derivatan för en funktion $y = f(x)$, vanligast är

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx} \quad \text{och} \quad D[f(x)].$$

I nästa exempel använder vi derivata för att bestämma ekvationen för en tangent.

Exempel 3.7.3. Låt $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $g(x)$ i punkten $(1, 3)$.

Lösningsförslag. Tangenten är en rät linje och kan alltså skrivas på formen $y = kx + m$. k-värdet, som ju motsvarar lutningen, ges av funktionens derivata i punkten $(1, 3)$. I Exempel 3.7.2 visade vi att

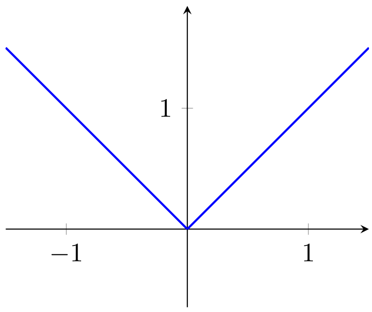
$$g'(x) = 4x^3 + 6x.$$

Med $x = 1$ får vi $k = g'(1) = 4 + 6 = 10$. Vi sätter in detta i linjens ekvation tillsammans med tangeringspunkten $(x, y) = (1, 3)$ för att bestämma m: $3 = 10 \cdot 1 + m$ ger $m = -7$. Den sökta tangentens ekvation är

$$y = 10x - 7.$$

□

Inte alla funktioner är deriverbara, det kan ju hända att gränsvärdet som definierar derivatan inte kan beräknas. Ett klassiskt exempel är funktionen $f(x) = |x|$; se Figur 49.



Figur 49: Grafen till funktionen $f(x) = |x|$. Denna funktion är inte deriverbar i $x = 0$.

Funktionen kan skrivas som

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = x & \text{då } x \geq 0 \\ h(x) = -x & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Derivatan av funktionen $g(x)$ är 1 medan derivatan av funktionen $h(x)$ är -1. Detta innebär faktiskt att derivatan inte är definierad i punkten 0. Låt oss se varför utifrån derivatans definition. Antag först att $h > 0$, vi får då

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Om vi istället antar att $h < 0$ får vi

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$

eftersom $f(h) = -h$ då h är negativt.

Alltså saknar funktionen $f(x)$ derivata i punkten 0. Men i alla andra punkter är funktionen deriverbar.

Ett annat sätt att intuitivt se att funktionen inte har någon derivata i 0 är att det inte finns en unik tangent. När grafen har ett ”hörn”, eller en ”spets”, kan man rita oändligt många räta linjer som snuddar spetsen.

3.7.2. Derivator av kända funktioner

Att varje gång man vill derivera en funktion beräkna ett gränsvärde blir omständigt. Som tur är kan man från derivatans definition härleda derivatan för de grundläggande elementära funktionerna. I tabellen nedan ges formler för dessa derivator (bevis brukar finnas i kurslitteratur för envariabelanalys).

Funktion	Derivata
C (konstant)	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Som nämndes i Avsnitt 3.3.4 är talet e definierat så att exponentialfunktionen e^x blir sin egen derivata.

För att bevisa att derivatan av x^n är nx^{n-1} för ett godtyckligt heltal n kan man använda binomialsatsen; i föregående avsnitt visades specialfall av detta. Kom ihåg att $1/x^m$ kan skrivas som x^{-m}, och formeln ovan går att använda även i detta fall.

Exempel 3.7.4. Vi har att

$$D[2] = 0\,,\quad D[x] = 1\,,\quad D\left[x^{10}\right] = 10x^9\,,\quad D\left[x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\,,\quad D\left[\frac{1}{x}\right] = D\left[x^{-1}\right] = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

3.7.3. Deriveringsregler

Utifrån derivatorna för de grundläggande funktionerna givna ovan tillsammans med regler för hur man deriverar summor, produkter, sammansättningar och kvoter kommer vi att kunna derivera en massa olika funktioner utan att behöva gå tillbaka till derivatans definition.

Derivatan av en summa av funktioner är densamma som summan av funktionernas derivator, och om en funktion multipliceras med en konstant a så kommer motsvarande derivata också multipliceras med a, alltså:

$$\begin{aligned} D[f(x) + g(x)] &= D[f(x)] + D[g(x)], \\ D[af(x)] &= aD[f(x)] \qquad \text{för} \qquad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exempel 3.7.5. Vi har att

$$D\left[\sin x + x^2 + 4x^4\right] = D\left[\sin x\right] + D\left[x^2\right] + 4D\left[x^4\right] = \cos x + 2x + 16x^3.$$

Produktregeln beskriver hur man deriverar produkten av två funktioner. Det är lite mer komplicerat än för summor, man kan inte bara multiplicera de två funktionernas derivator:

$$D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Exempel 3.7.6. Vad är derivatan av funktionen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ i punkten $x = \pi$?

Lösningsförslag. Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då får vi, enligt produktregeln, att

$$D[f(x)] = D[g(x)h(x)] = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Alltså är $f'(\pi) = 2\pi \cdot 0 + \pi^2 \cdot (-1) = -\pi^2$. □

Exempel 3.7.7. Vad är derivatan av funktionen $f(x) = e^x \cdot \ln x$?

Lösningsförslag. Låt $g(x) = e^x$ och låt $h(x) = \ln x$. Då får vi

$$D[f(x)] = D[g(x)h(x)] = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$$

enligt produktregeln. □

Kedjeregeln beskriver hur man deriverar en sammansatt funktion:

$$D\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Funktionen $f(x)$ kallas för den *yttre* funktionen och $g(x)$ för den *inre* funktionen. Regeln minns man då lättast genom att tänka ”yttre derivatan gånger inre derivatan”.

Exempel 3.7.8. Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sin x^2$.

Lösningsförslag. Låt $g(x) = \sin x$ vara den yttre funktionen och låt $h(x) = x^2$ vara den inre. Då är $f(x) = g\big(h(x)\big)$. Enligt kedjeregeln ges derivatan av

$$D\left[f(x)\right] = D\left[g\big(h(x)\big)\right] = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = \cos x^2 \cdot 2x.$$

Notera att man i uttrycket för derivatan g' av den yttre funktionen g ska sätta in hela den inre funktionen $h(x)$. □

Exempel 3.7.9. Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = (x^2 + 5)^{10}$ i punkten $x = 0$.

Lösningsförslag. Låt $g(x) = x^{10}$ och låt $h(x) = x^2 + 5$. Då är $f(x) = g\big(h(x)\big)$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D[f(x)] = D\left[g\big(h(x)\big)\right] = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = 10 \cdot (x^2 + 5)^9 \cdot 2x$$

och vi får $f'(0) = 10(0^2 + 5)^9 \cdot 2 \cdot 0 = 0$. □

En annan möjlig lösning är att utveckla $(x^2 + 5)^{10}$ med binomialsatsen och sedan derivera polynomet termvis, men detta är en klart längre uträkning.

Slutligen har vi en deriveringsregel till, nämligen *kvotregeln*:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

Genom att skriva om $f(x)/g(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ kan man härleda kvotregeln från produktregeln och kedjeregeln. Vi uppmanar läsaren att själv bevisa kvotregeln ovan genom att beräkna derivatan av $f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ genom produkt- och kedjeregeln.

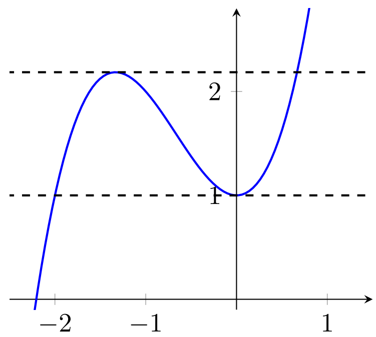
Exempel 3.7.10. Beräkna derivatan av $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.

Lösningsförslag. Låt $g(x) = x^2$ och sätt $h(x) = \sin(x)$. Då är

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x)h'(x)}{\big(h(x)\big)^2} = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}. \qquad \square$$

3.7.4. Tillämpning av derivata för att bestämma max- och minpunkter

Vi säger att en funktion $f(x)$ har ett lokalt maximum i $x = a$ om alla funktionsvärdena precis intill punkten a är mindre än $f(a)$. På samma sätt har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = a$ om funktionsvärdena precis intill punkten a är större än $f(a)$. Punkter som är lokala maxima eller minima kallas för (lokala) *extrempunkter*. Värdet $f(a)$ anger *extremvärdet*.



Figur 50: Grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Derivatan $f'(x) = 3x^2 + 4x = (3x + 4)x$ har nollställen i $x = 0$ och i $x = -4/3$. I $x = 0$ har funktionen en lokal minimipunkt och i $x = -4/3$ antar f ett lokalt maximum. Tangenterna i dessa punkter är horisontella linjer.

För en funktion som är deriverbar är derivatan noll i de lokala extrempunkterna. Derivatan motsvarar ju lutningen på tangenten till funktionens graf och att lutningen är noll innebär att tangenten är horisontell, vilket den är vid extrempunkterna där grafen ”vänder”; se Figur 50. Vi formulerar detta i följande sats.

Sats 9. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion definierad på hela $\mathbb{R}$. Om $x = a$ är en lokal extrempunkt så är $f'(a) = 0$.

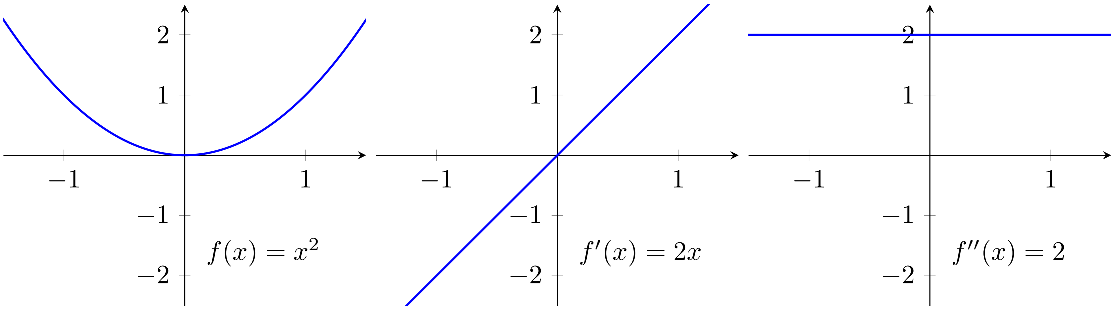
Exempel 3.7.11. Att funktionen $f(x) = 16 - x^2$ har ett maximum för $x = 0$ är lätt att se, ty i denna punkt är värdet 16 och för alla andra värden på x är $16 - x^2$ mindre än 16. Vi kontrollerar att derivatan i $x = 0$ är 0: $f'(x) = -2x$ så mycket riktigt är $f'(0) = 0$.

Notera att det kan finnas punkter där derivatan är noll, men som ändå inte motsvarar ett maximum eller ett minimum. Ett exempel på en sådan så kallad *terrasspunkt* finns med i grafen i Figur 54 i ett senare exempel. Alla punkter där $f'(x) = 0$ kallas gemensamt för *stationära punkter*.

Man kan alltså använda derivatan för att bestämma de stationära punkterna. Om andraderivatan $f''(x)$, vilken definieras som derivatan av $f'(x)$, är skild från noll kan den användas för att bestämma karaktären på extrempunkterna, det vill säga om det är ett maximum eller ett minimum. En negativ andraderivata innebär att en extrempunkt är ett lokalt maximum och en positiv andraderivata innebär ett lokalt minimum. Vi motiverar detta genom ett par exempel och med hänvisning till tolkningen av derivata som grafens lutning.

Låt oss först betrakta andragradspolynomet $f(x) = x^2$. Denna funktion har nollställe i punkten $x = 0$. Grafen till f är en parabel med minimum i origo. Funktionsgraferna till $f(x)$, $f'(x)$ och

$f''(x)$ är illustrerade i Figur 51. Derivatan, vars graf är en rät linje, antar värden som motsvaras av lutningen på kurvan till $y = f(x)$. Derivatan är negativ fram till $x = 0$ där $f'(x) = 0$ och därefter är den positiv. Derivatans graf har alltså alltid positiv lutning, nämligen lika med två, vilket innebär att andraderivatan är konstant och positiv, $f''(x) = 2$.



Figur 51: Grafen till $f(x) = x^2$, samt $f'(x) = 2x$ och $f''(x) = 2$.

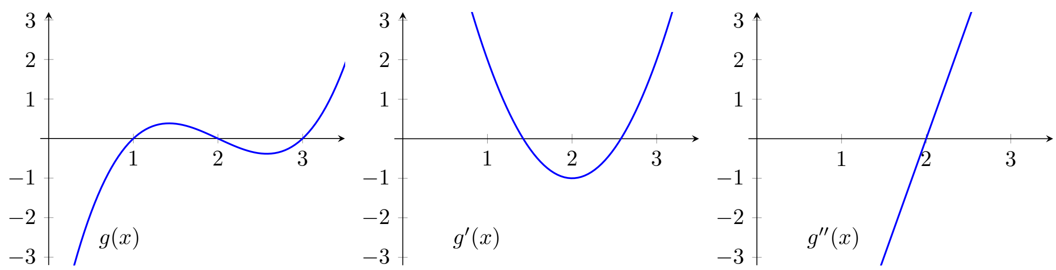
Att derivatan övergår från att vara negativ till att bli 0 och sedan positiv gäller mer allmänt i en omgivning kring varje lokalt minimum. Eftersom derivatan är växande så är andraderivatan positiv (i en del specialfall är den 0, men just nu bortser vi från den möjligheten). Om det istället rör sig om ett lokalt maximum är grafens lutning positiv en bit ifrån och fram till extrempunkten och negativ en bit därefter. Det innebär att derivatan har negativ lutning i denna omgivning och avtar från positiva värden till negativa, vilket därmed medför att andraderivatan är negativ i extrempunkten samt i en omgivning till denna.

Vi går vidare till ett tredjegradspolynom. Låt oss konstruera ett polynom med nollställen i $x = 1$, $x = 2$ och $x = 3$. Det gör vi genom att sätta

$$g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Derivering ger

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \quad \text{och} \quad g''(x) = 6x - 12.$$



Figur 52: Graferna till $g(x)$, $g'(x)$ samt $g''(x)$.

På grund av hur vi konstruerade vår funktion $g(x)$ så kommer grafen skära x-axeln i punkterna $x = 1, x = 2$ och $x = 3$, vilket vi ser i figuren. Derivatan har två nollställen som svarar mot funktionens lokala extrempunkter. Som synes är den första av dessa ett maximum och den andra ett minimum. Detta stämmer med att andraderivatan är negativ fram till $x = 2$ och sedan positiv.

I punkten $x = 2$ där $g''(x) = 0$ och där g'' byter tecken har $g(x)$ en så kallad *inflektionspunkt*. En funktion $g(x)$ sägs vara *konkav* då $g''(x) < 0$ och *konvex* då $g''(x) > 0$. Grafen ”kröker sig” åt olika håll där den är konvex och där den är konkav. Inflektionspunkten är en punkt där en kurva går från att vara konvex till konkav, eller tvärtom. Vi har med hjälp av ovanstående exempel insett följande.

Sats 10. Låt a vara en lokal extrempunkt till en funktion $f(x)$ som har både derivata och andraderivata. Om $f''(a) < 0$ så är a en lokal maximipunkt och om $f''(a) > 0$ så är a en lokal minimipunkt.

Exempel 3.7.12. Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Lösningsförslag. Eftersom $h(x)$ är ett polynom så är derivatan definierad överallt. Vi beräknar att $h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Lösningarna till $h'(x) = 0$ är $x = 2$ och $x = -1$. Detta blir våra potentiella extrempunkter.

Vi beräknar sedan $h''(x) = 12x - 6$ och får att $h''(-1) = -18 < 0$, så $x = -1$ är en lokal maximipunkt. Vidare så är $h''(2) = 18 > 0$ och $x = 2$ är alltså ett lokalt minimum. Funktionsvärdena i dessa punkter ges av $h(-1) = 12$ och $h(2) = -15$. □

3.7.5. Tillämpning av derivata vid grafritning

Vi ska bygga vidare på föregående avsnitt och använda information som vi får från funktioners derivator för att skissa deras grafer. När vi skissar vill vi ha en illustration som stämmer i stora drag, där det framgår var det finns lokala extrempunkter och var funktionen växer och var den avtar. Men mer exakt hur grafen ser ut bryr vi oss inte om i en skiss.

Betrakta funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 2$ och dess derivata som ges av $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Nollställena till derivatan är som synes $x = 1$ och $x = -1$. Andraderivatan ges av $f''(x) = 6x$ och om vi beräknar dess värde i punkterna $x = 1$ och $x = -1$ får vi $f''(1) > 0$ samt $f''(-1) < 0$. Alltså är $x = 1$ ett lokalt minimum med minimivärdet $f(1) = 0$ och $x = -1$ är ett lokalt maximum med maximivärdet $f(-1) = 4$.

Är man ute efter att skissa grafen är det användbart att ställa upp en *teckentabell* där derivatans tecken fylls i och funktionens beteende markeras. Första raden i tabellen står för värden på variabeln. Vi vill ha en kolumn för varje stationär punkt och kolumner före, mellan och efter dessa. I andra raden noteras var derivatan är noll och i de övriga kolumnerna anges tecknet på derivatan i motsvarande intervall. Till exempel så anger det första plustecknet i tabellen nedan att derivatan är positiv för alla $x < -1$ och minustecknet anger att derivatan är negativ då $-1 < x < 1$, slutligen är derivatan återigen positiv för $x > 1$. Sista raden i tabellen motsvarar funktionen, där indikerar pilar var funktionen är växande och var den är avtagande, utifrån derivatans tecken. För derivatans nollställen kan man skriva in funktionsvärden; i exemplet ses att -1 är ett lokalt maximum med värdet 4 och att 0 är ett lokalt minimum med värdet 0:

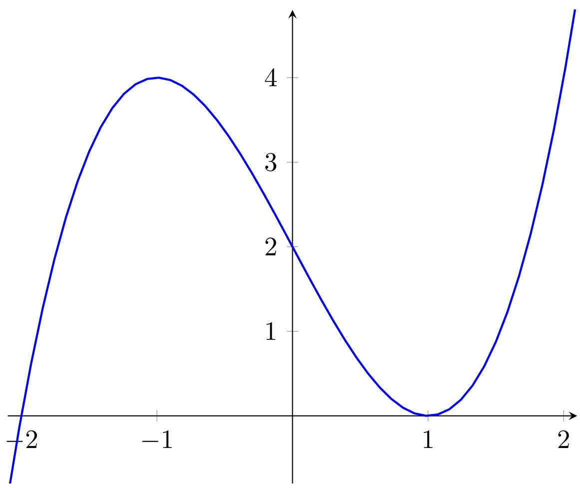
$x:$	-2	-1	0	1	2
$f'(x) = 3(x^2 - 1)$:	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) = x^3 - 3x + 2$:	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Om andraderivatan råkar vara noll i en stationär punkt kan man från teckentabellen ändå se om punkten motsvarar en extrempunkt.

I tabellen har vi väsentlig information för att kunna göra en grov skiss. Men vi behöver även veta något om hur $f(x)$ beter sig när x blir stort. Den dominerande termen i $f(x)$ är x^3 (för stora värden på x kommer de andra termerna, $-3x + 2$, knappt spela någon roll). Termen x^3 växer snabbt mot oändligheten då x går mot oändligheten: $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Motsvarande gäller för negativa värden på x, nämligen att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.

Det är även användbart att veta var grafen skär x-axeln, det vill säga funktionens nollställen. Genom att söka efter rationella rötter till tredjegradsekvationen $x^3 - 3x + 2 = 0$ finner vi att $x = 1$ är en rot. Med hjälp av polynomdivision kan vi få fram att $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$. Genom kvadratkomplettering finner vi därefter att nollställena till $x^2 + x - 2 = 0$ är $x = 1$ och $x = -2$. Funktionen $f(x)$ har alltså två nollställen: $x = -2$ och $x = 1$ (en dubbelrot).

I Figur 53 skissar vi nu grafen genom att använda all information som vi samlat.



Figur 53: Skiss av grafen $y = x^3 - 3x + 2$.

Ytterligare egenskaper som vi kan ta reda på är var funktionen är konvex och var den är konkav. Vi har beräknat att $f''(x) = 6x$. Alltså är andraderivatan negativ då $x < 0$, vilket motsvarar att f är konkav på detta intervall, och positiv då $x > 0$, så att f är konvex där. Vid $x = 0$ finns en inflektionspunkt. I figuren kan man se att grafens krökning vänder i $(0, 2)$.

Exempel 3.7.13. Undersök funktionen $h(x) = x^3(4 + x)$ och skissa funktionens graf.

Lösningsförslag. Funktionen $h(x) = x^3(4 + x)$ har nollställen $x = -4$ och $x = 0$ (trippelrot). Vi multiplicerar in x^3 i parentesen innan vi deriverar och faktoriserar sedan derivatan. Vi får då

$$h(x) = x^3(4 + x) = 4x^3 + x^4,$$
$$h'(x) = 12x^2 + 4x^3 = 4x^2(3 + x).$$

De stationära punkterna ges av att $h'(x) = 0$, vilket ger $x = 0$ och $x = -3$. Om dessa är lokala extrempunkter samt var funktionen växer resp. avtar är lättast att se med hjälp av en teckentabell. Från det faktoriserade uttryck för $h'(x)$ är det lätt att inse att derivatan är negativ för alla $x < -3$ och positiv för alla $x \geq -3$ utom för $x = 0$ (x^2 är ju alltid positiv så det är $x + 3$ som avgör tecknet).

x:		-3		0	
$h'(x) = 4x^2(3 + x)$:	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x) = x^3(4 + x)$:	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0	$\nearrow$

I tabellen anges även funktionsvärdena $h(-3) = -27$ och $h(0) = 0$.

Hittills har vi då följande: $h(x)$ är avtagande då $x \leq -3$ och växande då $x \geq -3$; $h(x)$ har lokalt minimum i $x = -3$ med minimivärdet -27 men saknar lokalt maximum. Punkten $x = 0$ är en terrasspunkt.

För att hitta eventuella inflektionspunkter behöver vi andraderivatan

$$h''(x) = 24x + 12x^2 = 12x(2 + x).$$

Inflektionspunkter uppfyller ekvationen $h''(x) = 0$; lösningarna är $x = 0$ och $x = -2$. Även för andraderivatan kan en teckentabell vara till hjälp, eftersom dess tecken avgör på vilka intervall funktionen är konvex respektive konkav.

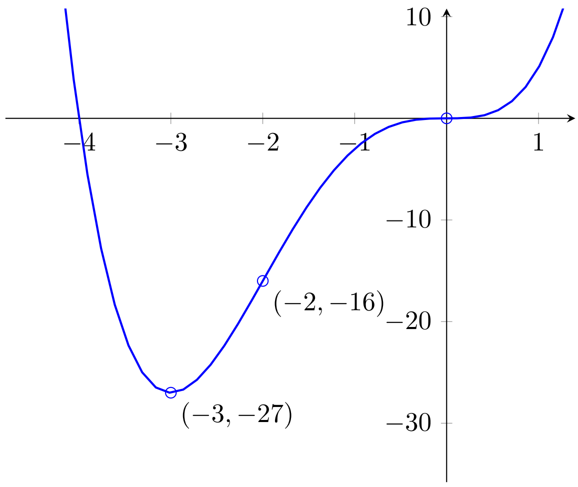
x:		-2		0	
$h''(x) = 12x(2+x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x) = x^3(4+x)$:	konvex	-16	konkav	0	konvex

Funktionen är konvex då $x \leq -2$ och då $x \geq 0$, och konkav då $-2 \leq x \leq 0$. Inflektionspunkterna är $x = -2$ och $x = 0$. För ännu lite bättre skiss beräknar vi även $f(-2) = -16$.

Innan vi skissar grafen ska vi även bestämma gränsvärden. Eftersom $h(x) = 4x^3 + x^4$ så är det x^4-termen som dominerar för stora (positiva och negativa) värden på x. Denna går då mot oändligheten, det vill säga

$$h(x) \to \infty \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty.$$

I Figur 54 visas funktionens graf. Notera hur grafens krökning vänder i inflektionspunkterna.



Figur 54: Grafen för funktionen $h(x) = x^3(4+x)$.

□

Sammanfattningsvis är det lämpligt att svara på följande frågor för att kunna skissa en funktions graf:

1. Vilka är funktionens nollställen? (Bra att ha men inte nödvändigt för en skissen.)
2. Vilka är funktionens extrempunkter? (Fås med hjälp av derivatans nollställen.)
3. Vilken karaktär har extrempunkterna—lokala maxima eller minima? (Avgörs av derivatans teckenväxling eller andraderivatan.)
4. Hur beter sig funktionen för stora värden på variabeln? (Bestäm gränsvärden.)

För en lite noggrannare skiss kan man även ta hjälp av inflektionspunkterna (som fås med hjälp av andraderivatan) och eventuellt funktionsvärde i någon enstaka annan punkt, till exempel någon punkt för vilken funktionsvärdet är mycket lätt att beräkna eller någon punkt som visar på ett ungefär hur snabbt funktionen växer eller avtar i de fall då gränsvärdet är oändligheten.

3.7.6. Optimering av en funktion på ett intervall

Anta nu att vi har en funktion som är definierad endast på ett intervall $[a, b]$ och att vi vill bestämma funktionens största och minsta värden. Detta är ett optimeringsproblem och nu efterfrågas globala extrempunkter.

Det är inte så svårt att konstatera att de största och minsta värdena antingen sammanfaller med en lokal extrempunkt, och alltså antas där derivatan är noll, eller så antas de i någon av intervallets ändpunkter—funktionen kan ju vara ”på väg upp eller ner” när variabeln går mot a eller b. Om vi dessutom tillåter funktioner som inte är deriverbara i alla punkter så kan ett extremvärde potentiellt antas i en sådan punkt.

Om man vill finna maximum och/eller minimum av en funktion $f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så kan man därför gå till väga enligt följande:

1. Derivera $f(x)$ och bestäm alla punkter inom $[a, b]$ där $f'(x) = 0$. Beräkna funktionsvärdet i dessa.

2. Beräkna funktionens värde i eventuella punkter där derivatan inte är definierad.

3. Beräkna funktionens värde i ändpunkterna.

4. Jämför de funktionsvärden du beräknat! Funktionens maximum resp. minimum är det största resp. minsta värdet.

Exempel 3.7.14. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ på intervallet $[-3, 1]$.

Lösningsförslag. Funktionen är deriverbar på hela intervallet. Från Exempel 3.7.12 vet vi att derivatan till $f(x)$ är noll i $x = 2$ och $x = -1$ och att $f(2) = -15$ samt $f(-1) = 12$. Det första värdet ingår dock inte i vårt intervall. Låt oss ta reda på funktionsvärdena i ändpunkterna. Vi får $f(-3) = -40$ och $f(1) = -8$. Vi jämför värdena 12, -40 och -8. Funktionens största värde är $f(-1) = 12$ och dess minsta värde är $f(-3) = -40$. □

Låt oss nu titta på ett lite svårare exempel.

Exempel 3.7.15. Finn största och minsta värde som funktionen $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ antar på intervallet $[-2, 1/4]$.

Lösningsförslag. Eftersom vi har ett absolutbelopp $|x|$ med så är derivatan inte definierad i $x = 0$. Låt oss dela upp funktionen i två delar, där båda delarna är polynom. Funktionen kan skrivas som

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{om } x \geq 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Det är praktiskt om vi definierar $g(x) = -x^2 + x + 2$ och $h(x) = -x^2 - x + 2$. Derivatan för $f(x)$ då $x > 0$ är $g'(x) = -2x + 1$, som har nollställe $x = \frac{1}{2}$. Denna punkt ligger dock inte i det intervallet $x > 0$.

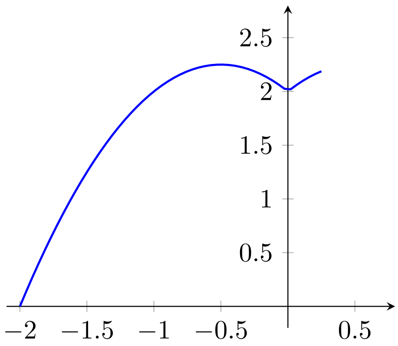
Då $x < 0$ är derivatan $h'(x) = -2x - 1$, vilken har nollställe $x = -\frac{1}{2}$. Denna punkt ligger i intervallet och kan eventuellt ge största eller minsta värde.

Tillsammans med ändpunkterna $x = -2$ och $x = \frac{1}{4}$, samt $x = 0$ där funktionen inte är deriverbar har vi därmed fyra punkter som kandidater till min- och maxpunkter. Vi beräknar funktionsvärdena i dessa punkter och får

$$f(0) = 2, \quad f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{9}{4}, \quad f(-2) = 0 \quad \text{och} \quad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{35}{16}.$$

Eftersom $\frac{9}{4} = \frac{36}{16}$ så är $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right)$. Alltså är funktionens största värde $9/4$ och funktionens minsta värde är 0. Funktionens graf visas i Figur 55.

□



Figur 55: Grafen till funktionen $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ på intervallet $[-2, 1/4]$.

Övningar 3.7

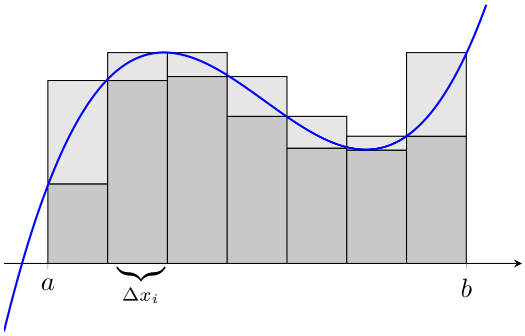
1. Bestäm gränsvärdet av $\frac{\tan(x)}{x}$ då $x \to 0$. Du får använda att om $\lim_{x\to a} f(x) = A$ och $\lim_{x\to a} g(x) = B$ så har vi att $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.
2. Bestäm derivatan av $x^5 + x^4 + 3x^2 - 2 + x^{-1}$
3. Bestäm derivatan av $\sin 2x + \cos 2x$.
4. Bestäm derivatan av $\sin^2 x + \cos^2 x$. Förklara resultatet.
5. Bestäm $f'(0)$ då
   (a) $f(x) = x^2 + 2x \cos x$
   (b) $f(x) = e^{\sin x}$
   (c) $f(x) = (2x + 4)^{10}$
6. Finn minsta och största värde som följande funktioner antar i intervallet $[-10, 10]$:
   (a) $10 - 2x - x^2$
   (b) $|x - 2| + x^2 - 4x$
7. Bestäm tangentens ekvation till kurvan $f(x) = 2x^3 - x + 1$ i punkten $(2, 15)$.
8. Bestäm lokala extrempunkter till $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$ och avgör vilka som är lokala maxima respektive minima.
9. Bestäm x-koordinaten till de lokala extrempunkterna hos $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
10. Funktionen $f(x) = \frac{x}{|x|}$ är deriverbar överallt förutom i punkten $x = 0$. Rita grafen till funktionen och förklara varför.

3.8. Integraler

När vi nu lärt oss att derivera är det dags att gå vidare till nästa viktiga grundbult inom matematisk analys, nämligen integraler. Integraler kan tolkas som en area och det är den vägen vi ska introducera begreppet. För att beräkna dessa areor visar det sig att man behöver ”använda derivata baklänges”. Arean under en graf $y = f(x)$ kan beräknas med hjälp av en så kallad primitiv funktion, vilket är en funktion $F(x)$ vars derivata är $f(x)$.

3.8.1. Integralens definition

Betrakta arean i Figur 56 som begränsas av x-axeln och grafen $y = f(x)$ då $x \in [a, b]$. För att uppskatta areans storlek kan vi ta hjälp av så kallade *övre* och *undre rektanglar*. Vi delar upp intervallet $[a, b]$ i n stycken delintervall. Låt $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ så att intervall nummer i ges av $[x_{i-1}, x_i]$. Dess längd, $x_i - x_{i-1}$ betecknar vi med Δx_i.



Figur 56: Arean under en kurva kan approximeras med summan av arean för rektanglar.

Låt M_i beteckna det största funktionsvärdet och m_i det minsta, i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Då har den övre rektangeln i det i:te intervallet arean $M_i \cdot \Delta x_i$ och den undre rektangeln i samma intervall har arean $m_i \cdot \Delta x_i$. Summerar vi alla övre rektanglar respektive alla undre rektanglar erhåller vi den så kallade *översumman* respektive *undersumman*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{resp.} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Exempel 3.8.1. Låt $f(x) = x^2$. Beräkna undersumman respektive översumman på $[1, 2]$ då intervallet delas i två lika stora delintervall.

Lösningsförslag. Delintervallen är $[1, 3/2]$ och $[3/2, 2]$, båda med längden $\Delta x = 1/2$. Eftersom $f(x)$ är växande på intervallet $[1, 2]$ så kommer det största värdet antas i högra ändpunkterna och det minsta i vänstra ändpunkterna. Funktionens största värden på delintervallen är $M_1 = f(3/2) = 9/4$ och $M_2 = f(2) = 4$. De minsta värdena är $m_1 = f(1) = 1$ och $m_2 = f(3/2) = 9/4$. Det ger översumman

$$S_2 = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x = \frac{9/4 + 4}{2} = \frac{25}{8}$$

och undersumman

$$s_2 = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x = \frac{1 + 9/4}{2} = \frac{13}{8}. \qquad \square$$

Under förutsättning att f är positiv och begränsad på det aktuella intervallet ligger den sökta arean givetvis mellan dessa två areor. Areorna s_n och S_n närmar sig varandra då indelningen blir finare och finare, alltså då antalet delintervall går mot oändligheten samtidigt som deras längd går mot noll. Vi säger att f är *integrerbar* om s_n och S_n går mot samma tal då $n \to \infty$ (samtidigt som $\Delta x_i \to 0$). Gränsvärdet kallas för *integralen av f*.

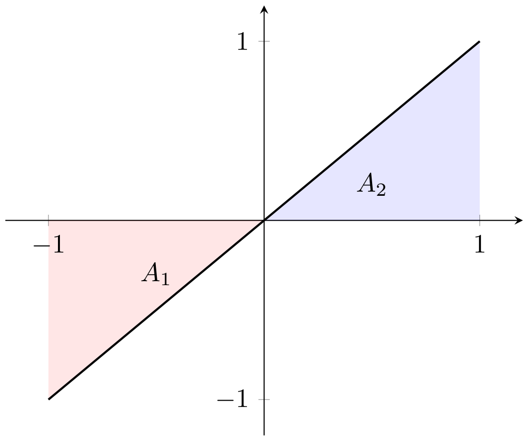
Integralen av $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ betecknas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

vilket utläses ”integralen av f från a till b”. Integraltecknet $\int$ är ett utdraget S, för summa. a och b kallas integrationsgränser och funktionsuttrycket $f(x)$ som står ”under” (innanför) integraltecknet kallas *integrand*. Vad det efterföljande $\mathrm{d}x$ står för behöver vi i detta material inte bry oss om, mer än att x:et anger att det är x som är variabeln man ska integrera med avseende på.

I resonemanget hittills har vi utgått från att grafen till funktionen ligger ovanför x-axeln, men integraldefinitionen som ett gränsvärde för över- och undersummor fungerar även om f är negativ. Om $f < 0$ är M_i och m_i i över- och undersummorna negativa vilket gör att integralen ges av arean mellan x-axeln och grafen men nu med ett minustecken. Så vid beräkning av integraler för en godtycklig integrerbar funktion f ges integralen därmed av arean ovan x-axeln minus arean under x-axeln. Ofta sägs det lite slarvigt att arean under x-axeln är negativ, men en ytas storlek kan förstås aldrig vara negativ.

Exempel 3.8.2. Integralen av $f(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$ är noll, vi har nämligen $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 = 0$, med beteckningar enligt Figur 57.



Figur 57: Integralen av $f(x) = x$ mellan -1 och 1 är noll eftersom areorna A_1 och A_2 är lika stora men på olika sidor om x-axeln.

De flesta funktioner—kanske alla—som du hittills har stött på är integrerbara. I allmänhet gäller att alla kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna intervall där de är definierade. Observera logiken i påståendet ”alla kontinuerliga funktioner är integrerbara”. Det innebär att kontinuerlig är ett *tillräckligt villkor* för att en funktion $f(x)$ ska vara integrerbar, men inte något nödvändigt sådant. Det finns gott om funktioner som inte är kontinuerliga men som ändå är integrerbara. Ett enkelt exempel är funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 5 \text{ då } 1 \leq x \leq 2 \\ 10 \text{ då } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Arean som begränsas av x-axeln och grafen på intervallet $[1, 4]$ är uppenbarligen (rita gärna en figur) $5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 25$, så $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 25$.

3.8.2. Primitiva funktioner och analysens huvudsats

För linjära funktioner är det förstås lätt att beräkna integraler, eftersom areorna i detta fall blir trianglar. Men hur kan man beräkna arean under en kurva? Denna area ges, så som just förklarades, av ett gränsvärde motsvarande ”arean av oändligt många rektanglar som är oändligt smala”, vilket ju verkar vara ett mycket knepigt gränsvärde. Det fina är att man kan visa att integraler är nära relaterade till derivata. Innan vi formulerar det sambandet inför vi en definition.

Definition 13. Om f och F är två funktioner sådana att $F'(x) = f(x)$ för alla x (alternativt i ett intervall I) så kallas F för en *primitiv funktion* till f (i intervallet I).

Exempel 3.8.3. Låt $f(x) = x^2$. Då är $F(x) = x^3/3$ en primitiv funktion till f eftersom $F'(x) = 3 \cdot x^2/3 = x^2$.

Vid beräkning av integraler används följande sats, vilken är så viktig att den kallas *analysens huvudsats*. Vi bevisar inte satsen, beviset gås normalt igenom i inledande analyskurser på högskolan.

Sats 11 (Analysens huvudsats)**.** Om f är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$ och om F är en primitiv funktion till f i $[a, b]$ så gäller det att

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Satsen säger alltså att integralen—som vi kan tolka som en area—ges av skillnaden mellan den primitiva funktionens värden i intervallets ändpunkter! För att förenkla redovisningen vid beräkningar av integraler har en mellanstegsnotation införts, där den primitiva funktionen anges innan man sätter in intervallets ändpunkter. Man skriver

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exempel 3.8.4. Vi har att

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Vi gör en kort tillbakablick till Exempel 3.8.1. Där bestämde vi översumman $S_n = 25/8$ och undersumman $s_n = 13/8$ till $f(x) = x^2$ i intervallet $[1, 2]$. Integralens värde $7/3$ som vi just beräknade ligger med nödvändighet mellan dessa summor.

Exempel 3.8.5. Låt oss verifiera att integralen av $f(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$ från Exempel 3.8.2 verkligen blir noll. Funktionen $F(x) = x^2/2$ är en primitiv till $f(x) = x$ och alltså gäller det att

$$\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Uppenbarligen kommer vi att ha nytta av att finna primitiva funktioner för att beräkna integraler, så låt oss bekanta oss mer med dem.

Vi har konstaterat att $F(x) = x^3/3$ är en primitiv funktion till $f(x) = x^2$ eftersom $F'(x) = 3 \cdot x^2/3 = x^2$. Men även $x^3/3 + 1$ är en primitiv funktion till f, liksom $x^3/3 - 173$, eftersom 1 och -173 försvinner vid derivering. Detta antyder att det finns oändligt många primitiva funktioner till f (om den har åtminstone en). Mer precist gäller:

Sats 12. Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$. Då är även $F(x)+C$, där C är en godtycklig konstant, en primitiv funktion till $f(x)$. Vidare är varje primitiv funktion till $f(x)$ på formen $F(x) + C$ för något värde på C.

Vi kan tolka detta geometriskt. Eftersom $f(x)$ är en derivata anger den, för varje värde på x, lutningen för en graf. Lutningen bestämmer kurvans form men säger ingenting om hur högt upp grafen ska ritas; ritar vi $y = F(x)$ kan vi alltid välja att flytta kurvan i höjdled för att få grafen $y = F(x) + C$, utan att ändra derivatan. Om man däremot bestämmer att grafen ska gå genom en viss punkt (x_0, y_0) så kan C väljas på endast ett sätt. I nästa exempel ges ett sånt villkor.

Exempel 3.8.6. Bestäm den primitiva funktion till $g(x) = 10e^{2x}$ vars graf går genom $(0, 10)$.

Lösningsförslag. Eftersom derivatan av e^{2x} är $2e^{2x}$—vi får ut en faktor 2 vid derivering—så kan vi klura ut att en primitiv funktion till $10e^{2x}$ ges av $5e^{2x}$. Alla primitiva funktioner ges då av $G(x) = 5e^{2x} + C$, där C är en konstant. Det är lätt att kontrollera detta genom att derivera $G(x)$.

Vi söker den primitiva funktion som uppfyller att $G(0) = 10$. Det ger $5e^0 + C = 10$ vilket medför att $C = 5$. Den sökta primitiva funktionen är alltså

$$G(x) = 5e^{2x} + 5.$$

□

Observera att det inte spelar roll vilken primitiv funktion som används när en integral ska beräknas, den godtyckliga konstanten C påverkar inte resultatet:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+C]_a^b = (F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b)-F(a).$$

Utifrån de grundläggande elementära funktionernas derivator (se Avsnitt 3.7.2) kan vi ställa upp följande tabell över primitiva funktioner. Har man bra koll på derivatorna så kan man enkelt hitta dessa primitiva funktioner genom att ”tänka baklänges”.

funktion	primitiv funktion
0	C (konstant)
A (konstant)	$Ax+C$
$x^a,\quad a\neq -1$	$\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Ibland kallar man primitiva funktioner för *obestämda integraler* och skriver

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Om man säger att man integrerar en funktion men inte har några gränser så åsyftas att man bestämmer den primitiva funktionen. Med denna beteckning blir det lättare att skriva ner regler för beräkning av primitiva funktioner, vilka även gäller för integraler.

3.8.3. Integrationsregler

Med D som beteckning för derivatan har vi derivationsreglerna

$$D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)] \quad \text{och} \quad D[af(x)] = aD[f(x)].$$

Från dessa kan man härleda motsvarande regler för primitiva funktioner:

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad \int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

där a är en konstant. Man kan alltså integrera summor termvis och flytta ut konstanta faktorer för att göra det lite enklare för sig.

Exempel 3.8.7. Bestäm $\displaystyle\int x^3+3x^2+1\,\mathrm{d}x$.

Lösningsförslag 1. Enligt räknereglerna gäller det att

$$\int x^3+3x^2+1\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x.$$

Vi beräknar de tre integralerna var för sig och får

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+C_1, \quad \int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3+C_2, \quad \int 1\,\mathrm{d}x = x + C_3,$$

där C_1, C_2 och C_3 är konstanter. När vi lägger ihop dessa tre svar får vi konstanten $C_1 + C_2 + C_3$ vilken vi helt enkelt kallar för C. Alltså har vi att

$$\int x^3 + 3x^2 + 1 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^3 + x + C.$$

Vi testar att vi verkligen har fått fram en primitiv funktion genom att derivera resultatet.

$$D\left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x + C\right] = x^3 + 3x^2 + 1,$$

vilket är precis vad vi ville ha. □

När man har insett hur det fungerar behöver man förstås inte skriva ut att de olika termerna motsvarar tre integraler. Vi kommer inte att göra så mer. Här följer en kort och smidig lösning.

Lösningsförslag 2. Vi har att

$$\int x^3 + 3x^2 + 1 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^3 + x + C, \quad \text{där } C \text{ är en konstant.}$$ □

Exempel 3.8.8. Beräkna integralen

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \, \mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag. Vi har att

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \, \mathrm{d}x = 3\big[e^x\big]_{\ln 1}^{\ln 2} = 3\left(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}\right).$$

(Det går också att skriva $\big[3e^x\big]_{\ln 1}^{\ln 2}$ i andra steget ovan.) Eftersom e^x och $\ln x$ är inverser till varandra har vi $e^{\ln 2} = 2$ och $e^{\ln 1} = 1$. Vi får alltså att

$$3\left(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}\right) = 3(2-1) = 3.$$ □

Exempel 3.8.9. Beräkna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag. Vi har att

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = \big[-2\cos x + \sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\cos\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{2} + 2\cdot\cos 0 - \sin 0 = 3.$$ □

Exempel 3.8.10. Bestäm en primitiv funktion till $\sin x + \cos 2$.

Lösningsförslag. $\sin x$ har en primitiv funktion $-\cos x$. Termen $\cos 2$ är en konstant med en primitiv funktion $(\cos 2)x$. En primitiv funktion till hela uttrycket är därför $-\cos x + x\cos 2$. □

Exempel 3.8.11. Bestäm den primitiva funktionen $H(x)$ till

$$h(x) = \frac{4}{x} - 5x^{\frac{1}{2}}$$

som uppfyller att $H(1) = 2$.

Lösningsförslag. Funktionen $\frac{4}{x} = 4x^{-1}$ har en primitiv funktion $4\ln|x|$ och $x^{1/2}$ har en primitiv funktion $\frac{x^{3/2}}{3/2}$. Alla primitiva funktioner till h ges då av

$$H(x) = 4\ln|x| - 5 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = 4\ln|x| - \frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

På grund av villkoret $H(1) = 2$ måste vi ha $4\ln|1| - \frac{10\cdot 1}{3} + C = 2$, vilket ger $C = 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$. Funktionen är

$$H(x) = 4\ln|x| - \frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{16}{3}.$$

Kommentar: Absolutbeloppet i $\ln|x|$ behövs om x är negativ—annars är inte logaritmen definierad. I detta exempel skulle vi kunna strunta i absolutbeloppet. Eftersom h innehåller en kvadratrot av x så är funktionen ändå inte definierad för negativa värden på x. □

Hittills har de primitiva funktionerna vi sökt varit enkla att bestämma, så snart man har insett det som står i tabellen på sida 114. Men normalt sett är det mycket svårare att integrera än att derivera. Eftersom produkt- och kvotreglerna vid derivering ger lite mer komplicerade svar kan vi inte enkelt använda dem baklänges. För integraler finns tyvärr inga produkt- eller kvotregler som man kan ta till för godtyckliga produkter och kvoter. Detsamma gäller kedjeregeln för derivata av sammansatta funktioner, den kan inte enkelt vändas. Det finns till och med sammansättningar av elementära funktioner vars primitiva funktioner över huvudtaget inte kan uttryckas med elementära funktioner; ett vanligt exempel är e^{-x^2}.

Kuriosa. Att hitta en primitiv till e^{-x^2} är omöjligt om vi begränsar oss till de elementära funktionerna. Det visar sig dock att för integrationsgränserna $-\infty$ och ∞ (definitionen av integrationsgränserna $-\infty$ och ∞ ryms normalt inom grundkurser i matematik på högskolan) är integralen möjlig att bestämma! Det gäller faktiskt att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Resultaten kommer som en naturlig följdsats från en sats i matematisk statistik.

Men en typ av sammansättning kan vi integrera utan besvär: när en linjär funktion är sammansatt med någon av funktionerna i tabellen på sida 114. Ett exempel på detta har vi redan sett, nämligen funktionen $g(x) = 10e^{2x}$ (i Exempel 3.8.6) som har en primitiv funktion $5e^{2x}$. I detta fall är $2x$ en inre funktion. Om vi deriverar $g(x)$ skulle den inre derivatan ge en faktor 2, när vi integrerar måste vi kompensera för denna och istället dela med 2.

Här är två liknande exempel:

$$\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos 5x}{5} + C$$

$$\int 6e^{2x}\,\mathrm{d}x = 3e^{2x} + C$$

Så länge den inre funktionen är linjär är den inre derivatan en konstant och det går då bra att dela med den vid integrering. Men man kan inte alls göra så för sammansättningar där den inre funktionens derivata beror av x, då blir det helt fel (testar man att åter derivera så ser man att det blir fel).

Ibland kan man klura ut en primitiv funktion, som till exempel till funktionen $k(x) = 4x^3e^{x^4}$. Detta är en produkt där den första faktorn, $4x^3$, är exakt derivatan av den inre funktionen x^4 i faktorn e^{x^4}. Det är precis den produkt man får från kedjeregeln om man deriverar e^{x^4}, så $K(x) = e^{x^4} + C$ är de primitiva funktionerna till $k(x)$. Vi ska inte ägna oss mer åt sådana specialfall här. Genom att använda deriveringsreglerna för produkt och för sammansättning baklänges kan man hitta vägar att lösa några fler komplicerade integraler; metoder för detta lär man sig i högskolans grundkurser.

3.8.4. Att bestämma areor med hjälp av integraler

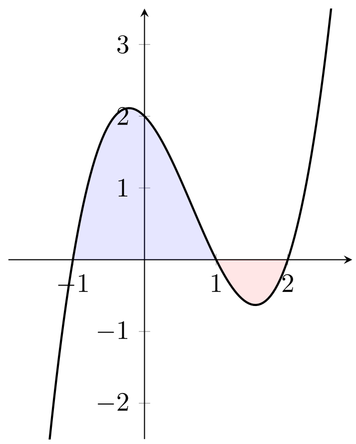
Vi definierade integraler utifrån en areatolkning. Nu ska vi avsluta med att beräkna några areor som begränsas av funktionskurvor.

Exempel 3.8.12. Bestäm arean av de områden som begränsas av kurvan $y = (x+1)(x-1)(x-2)$ och x-axeln.

Lösningsförslag. Sätt

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Vi börjar med att få till en grov skiss av arean. Eftersom vi fick polynomet $p(x)$ på faktoriserad form ser vi genast att dess skärningspunkter med x-axeln är -1, 1 och 2. Det är även lätt att räkna ut var grafen skär y-axeln, det ges av $y = p(0) = 2$. Det är ett tredjegradspolynom och vi har alla skärningspunkter med axlarna, från detta kan vi göra en skiss; se Figur 58. Vi ser att ytan består av två områden och vi beräknar den totala arean i två steg.



Figur 58: Med en skiss av funktionens graf ser vi vilken area vi ska bestämma.

Den area som ligger ovan x-axeln ges av integralen av $p(x)$ med gränserna -1 och 1,

$$\int_{-1}^{1} x^3 - 2x^2 - x + 2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{-2}{3} - \frac{1}{2} + 2\cdot(-1)\right) = \frac{13}{12} - \frac{-19}{12} = \frac{8}{3}.$$

När vi bestämmer den area som ligger nedanför x-axeln, där $p(x) < 0$, behöver vi multiplicera motsvarande integral med -1, eftersom integralen i detta fall anger arean med minustecken. Med gränserna 1 och 2 får vi

$$-\int_{1}^{2} x^3 - 2x^2 - x + 2 \,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{2^4}{4} - \frac{2\cdot 2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{12}.$$

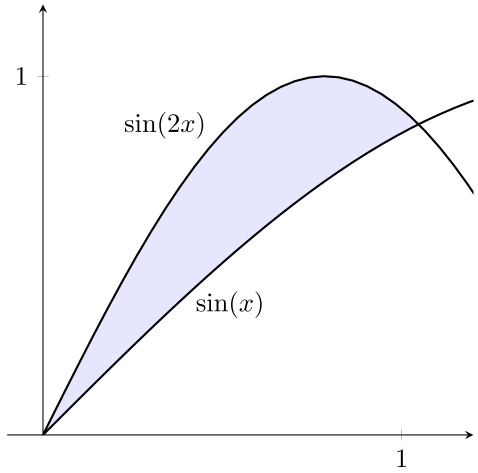
Lägger vi ihop de två areorna får vi hela arean, det vill säga

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ areaenheter.}$$

Arean är alltså lite mer än 3—vi kan jämföra med figuren och se att det verkar rimligt. □

Exempel 3.8.13. Bestäm arean A av området som begränsas av kurvorna $y = \sin(x)$ och $y = \sin(2x)$ då $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Lösningsförslag. I Figur 59 visas kurvorna. Vi noterar att kurvorna skär varandra då $x = 0$ och



Figur 59: Vi ritar området där $\sin(2x) > \sin x$.

$x = \frac{\pi}{3}$ och att däremellan gäller det att $\sin(2x) > \sin x$. Arean A ges därmed av arean under $y = \sin(2x)$ minus arean under $y = \sin x$, i det givna intervallet:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2x) - \sin x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(2x)}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{2} + \cos(0)\right) \\ &= \left(-\frac{-\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Som framgår av detta exempel så kan arean mellan graferna till två funktioner $f(x)$ och $g(x)$, där $f(x) \geq g(x)$, beräknas genom att man integrerar skillnaden $f(x) - g(x)$, alltså är arean

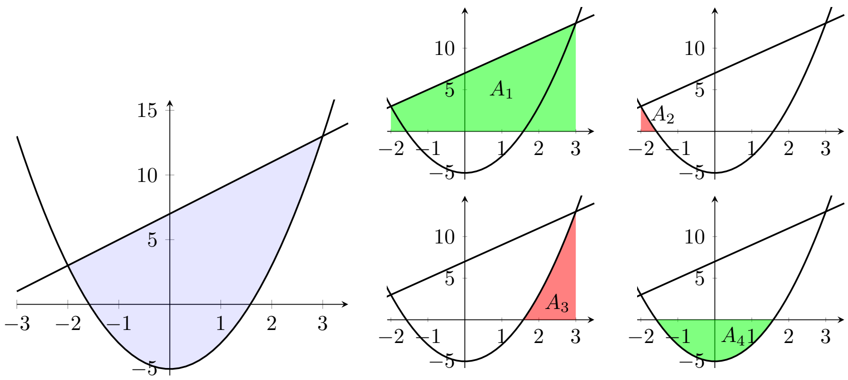
$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Denna formel gäller även om funktionerna antar negativa värden. Vi motiverar detta genom att visa att det stämmer i följande exempel.

Exempel 3.8.14. Bestäm arean A av området som begränsas av parabeln $y = 2x^2 - 5$ och linjen $y = 2x + 7$.

Lösningsförslag. Låt $f(x) = 2x^2 - 5$ och $g(x) = 7 + 2x$. Parabeln har ett minimum vid $(x, y) = (0, -5)$ och linjen som har lutning 2 skär y-axeln i $y = 7$. Från Figur 60 är det tydligt vilken area vi ska beräkna och att det är linjen som ligger överst.

Vi behöver bestämma skärningspunkterna mellan parabeln och linjen. Dessa ges av $2x^2 - 5 = 7 + 2x$, en andragradsekvation med lösningarna $x = -2$ och $x = 3$. Den sökta arean begränsad av



Figur 60: Arean som begränsas av parabeln $y = 2x^2 - 5$ och linjen $y = 7 + 2x$.

kurvorna kan bestämmas med formeln ovan. Vi får

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{3} (7+2x) - (2x^2 - 5)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{3} 2x - 2x^2 + 12\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 12x\right]_{-2}^{3} \\
&= 3^2 - \frac{2}{3}3^3 + 12\cdot 3 - \left((-2)^2 - \frac{2}{3}(-2)^3 + 12(-2)\right) \\
&= 27 - \left(-20 + \frac{16}{3}\right) = \frac{125}{3}.
\end{aligned}$$

Arean är $\frac{125}{3}$ a.e.

Men stämmer detta verkligen trots att en del av arean ligger under x-axeln? För att övertyga oss om att det faktiskt blir rätt ställer vi upp ett uttryck för arean en gång till, men nu behandlar vi areorna ovan och nedanför x-axeln var för sig.

Betrakta först arean A_1 mellan linjen och x-axeln över intervallet $[-2, 3]$. Denna ges av

$$A_1 = \int_{-2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Eftersom detta är en halv rektangel kan man förstås räkna ut arean utan att använda integral.) För att få arean ovan x-axeln ska vi subtrahera de två små areorna A_2 och A_3 under parabeln. Vi kallar parabelns skärningspunkter med x-axeln för a och b. Då är

$$A_2 = \int_{-2}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad A_3 = \int_{b}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Arean ovan x-axeln ges således av $A_1 - A_2 - A_3$.

Nu tar vi itu med arean A_4 nedanför x-axeln. Denna är begränsad av parabeln över intervallet $[a, b]$. Eftersom $f(x) \leq 0$ här så lägger vi till ett minus, det vill säga

$$A_4 = -\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Slutligen får vi hela den sökta arean som

$$(A_1 - A_2 - A_3) + A_4 = \int_{-2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{b}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integralerna av $f(x)$ ska alla subtraheras, men den sista integralen av dessa (över $[a, b]$) är negativ så med minustecknet framför ger den ett positivt bidrag till den totala arean. De tre integralerna av $f(x)$ över intervallen $[-2, a]$, $[a, b]$ och $[b, 3]$ kan slås samman till en integral med gränserna -2 och -3, vilket ger

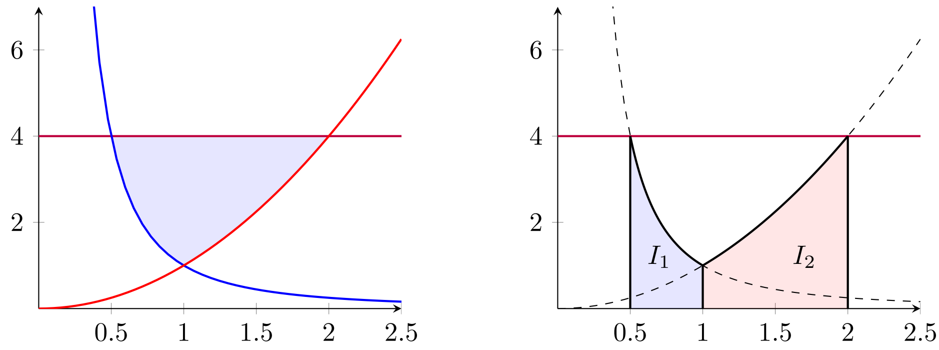
$$\int_{-2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x,$$

just den formel som gav oss svaret $\frac{125}{3}$ areaenheter. □

Vi avslutar med ett sista exempel på en areaberäkning.

Exempel 3.8.15. Bestäm arean A av området i första kvadranten som är helt omslutet av kurvorna $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$ och linjen $y = 4$.

Lösningsförslag. En skiss av graferna gör det lättare att se hur vi ska integrera, i Figur 61 är området markerat. Linjen $y = 4$ är den övre begränsningen, men som nedre begränsning är det först (till vänster) kurvan $y = \frac{1}{x^2}$ och sedan (till höger) kurvan $y = x^2$.



Figur 61: Vänster: Området som vi söker arean av. Höger: De två areorna I_1 och I_2 som ska tas bort.

För att hitta integrationsgränser behöver vi skärningspunkterna. För den första får vi ekvationen $4 = \frac{1}{x^2}$. Lösningarna är $x = \pm\frac{1}{2}$, men det är bara den positiva lösningen som vi är ute efter. För den andra skärningspunkten gäller $\frac{1}{x^2} = x^2$, vilken har den positiva lösningen $x = 1$. Slutligen för den sista skärningspunkten ska vi ha $4 = x^2$, som har positiv rot $x = 2$. Sammanfattningsvis är gränserna $\frac{1}{2}$, 1 och 2.

Vi börjar med att beräkna arean under linjen $y = 4$. Denna är helt enkelt en rektangel med höjden 4 och bredden $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ så arean är

$$R = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 \text{ areaenheter.}$$

Från denna ska vi dra bort de två areorna I_1 och I_2 som är markerade i Figur 61. Den första ges av integralen av $y = \frac{1}{x^2}$ över intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$, alltså

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = (-1) - (-2) = 1.$$

Den andra ges av integralen av $y = x^2$ över intervallet $[1, 2]$, alltså

$$I_2 = \int_{1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Den sökta aren är därmed

$$A = R - I_1 - I_2 = 6 - 1 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3} \text{ areaenheter.}$$ □

Övningar 3.8

1. Bestäm alla primitiva funktioner till
   (a) $x + x^2$
   (b) $1/x + 1/x^2$
   (c) e^{3x}
   (d) $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$
   (e) e^{ax+b}
2. Beräkna integralerna
   (a) $\int_0^1 x^2 + 3\,\mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^{-2} e^x - e\,\mathrm{d}x$
   (c) $\int_1^2 x^{5/2}\,\mathrm{d}x$
3. Beräkna arean som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x$.
4. Beräkna $\int_{-5}^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Facit till övningarna

Kapitel 1

Avsnitt 1.1

1. $1 - (5 - 4) = 0$ och $(-3)(7 + (-5)(-3 + 2)) = -36$
2. $(-1)^3 = -1$ och $(-1)^{12} = 1$.
3. $-(a - b - (a + b)) + (a + b) = a + 3b$ och $(a + b)(c + d) - c(a + b) = (a + b)d$.
4. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
5. Vi har likhet för $(2^2)^2 = 2^{2^2}$, men inte likhet för $(2^3)^2 = 8^2 = 64 \neq 2^{3^2} = 2^9 = 512$.
6. Kvot $k = 15$, rest $r = 2$, så $107 = 15 \cdot 7 + 2$.
7. $293 - 10 \cdot 17 = 123$, $123 - 7 \cdot 17 = 4$. Resten är alltså 4.
8. Om $a = 2m$ och $b = 2n$ är jämna heltal så är $ab = (2m)(2n) = 2(2mn)$, vilket är jämnt.
9. Om $a = 2m+1$ och $b = 2n+1$ är udda heltal så är $ab = (2m+1)(2n+1) = 2(2mn+m+n)+1$, vilket är udda.

Avsnitt 1.2

1. 6, nämligen $1, 2, 3, 4, 6$ och 12.
2. 4, talen $2, 3, 4$ och 6.
3. 40, som ges av produkten $4 \cdot 2 \cdot 5$.
4. 661 är ett primtal, medan $133 = 19 \cdot 7$ och $85 = 5 \cdot 17$. Det följer att 133 har de positiva delarna $1, 7, 19$ och 133 och att 85 har de positiva delarna $1, 5, 17$ och 85.
5. Vi har att $1024 = 2^{10}$ och $1331 = 11^3$.
6. Svaret beror på vilket nummer som väljs.

Avsnitt 1.3

1. 0, eftersom $18 + 7 = 25$, som är jämnt delbart med 5.
2. $64 \equiv_3 1$
3. Måndag
4. $64 \cdot 78 - 65 \cdot 101 \equiv_5 2$
5. $3^7 \equiv_{10} 7$
6. $2^{204} \equiv_{11} 5$

7. Talen modulo 6 blir

$$\begin{aligned} 36 + 23 &\equiv_6 5, \\ 36^{129} + 2186^{(5^2 \cdot 8/2-100)} &\equiv_6 0^{129} + 2186^0 = 1, \\ 5^{345} + 55 &\equiv_6 (-1)^{345} + 1 = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

8. Vi noterar att $5 \equiv_3 2$ och att $38800 = 30000 + 8800 \equiv_3 8800 = 6600 + 2200 \equiv_3 2200 = 2100 + 100 \equiv_3 100 = 99 + 1 \equiv_3 1$. Alltså är $38800 \cdot 5 \equiv_3 1 \cdot 2 = 2$.

9. Om vi räknar modulo 10 får vi att

$$37^{120} \equiv_{10} 7^{120} = (7^2)^{60} = 49^{60} \equiv_{10} (-1)^{60} = 1$$

så entalssiffran är en etta.

10. Vi börjar med att studera tiopotenser och noterar att $10^0 \equiv_5 1$ och $10^1 \equiv_5 0$. Generellt så är $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} \equiv_5 0$, för $n > 0$. Låt $N = n_0 \cdot 10^0 + n_1 \cdot 10^1 + \cdots + n_k \cdot 10^k$ vara ett godtyckligt tal, där $0 \leq n_i \leq 9$. Detta tal är då kongruent med n_0 modulo 5, och $n_0 \equiv_5 0$ precis då n_0 antingen är 0 eller 5.

11. Om $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1, s_0$ är siffrorna i talet t kan vi skriva det som $s_n \cdot 10^n + s_{n-1}10^{n-1} + \cdots s_1 \cdot 10 + s_0$. Eftersom $10 \equiv_3 1$ så är $10^n \equiv_3 1^n = 1$ och alltså lämnar talet t och dess siffersumma samma rest vid division med tre.

12. Vi noterar att $10^0 \equiv_{11} 1$ och $10^1 \equiv_{11} -1$. Detta innebär att om n är ett jämnt tal, dvs. om $n = 2k$ för något heltal k, så har vi att $10^n = 10^{2k} = (10^2)^k \equiv_{11} 1^k = 1$. På samma vis får vi om n är udda, dvs. $n = 2k + 1$, att $10^n = 10^{2k+1} = 10^{2k} \cdot 10^1 \equiv_{11} 1 \cdot -1 = -1$. Låt nu $N = n_0 \cdot 10^0 + n_1 \cdot 10^1 + \cdots + n_k \cdot 10^k$, då kan vi se att $N \equiv_{11} n_0 - n_1 + n_2 - \cdots + (-1)^k n_k$ vilket precis är den alternerande siffersumman för talet N. Denna är delbar med 11 precis då talet självt är delbart med 11.

Avsnitt 1.4

1. 100010_2

2. 13

3. 1000101_2

4. Vi kan först konvertera talet till bas 10, för att sedan konvertera det till bas 4. Vi har att $201_3 = 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 19$. Om vi konverterar detta till bas 4 observerar vi först att $4^2 = 16 < 19 < 32 = 4^3$. Eftersom $19 - 16 = 3$ blir nästa steg att konvertera talet 3 till bas 4, men eftersom $3 < 4$ behöver vi inte göra mer där. Då har vi tagit reda på att $19 = 16 + 3$. Då $16 = 4^2 = 100_4$ och $3 = 3_4$ har vi att $19 = 103_4$.

5. Vi börjar med att konvertera termerna till bas 10 för att kunna utföra subtraktion. Vi får $1002_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 2 = 29$ och $234_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 50 + 15 + 4 = 69$. Alltså får vi att $1002_3 - 234_5 = 29 - 69 = -40$. Talet 40 i bas 8 är $40 = 5 \cdot 8 = 5 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 50_8$. Alltså blir svaret $1002_3 - 234_5 = -50_8$.

6. En etta på jämn position bidrar med 2^{2k}, och en etta på udda position bidrar med $2 \cdot 2^{2m}$ till talet. Det räcker då att visa att tal på formen $2 \cdot 2^{2m} + 2^{2k}$ är jämnt delbara med 3. Använd nu Avsnitt 1.3.

Avsnitt 1.5

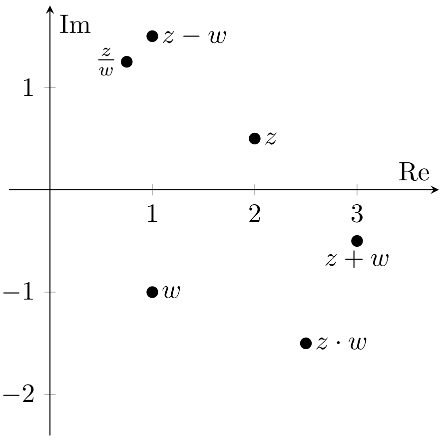
1. 41/42
2. $-20/3$
3. 5/2
4. Ja, de är lika.
5. (a) $\frac{41}{27}$
   (b) -9
   (c) $-\frac{1}{30}$
   (d) $\frac{29}{144}$
6. Om vi sätter $x = 0.09090909\ldots$ så gäller $100x = 9.09090909\ldots$. Tar vi skillnaden, får vi att $100x - x = 9$, så $99x = 9$. Detta ger att $x = 1/11$.

Avsnitt 1.6

1. $2^6 = 64$, $4^{3/2} = 8$ och $8^{1/3} = 2$.
2. 5
3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ och $9^{-1/2} = 1/3$.
4. 28/3
5. 27
6. $2 \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
7. $2^{-53/24}$
8. Antag att det finns ett maximalt förkortat bråk $\frac{a}{b}$ sådant att $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Om vi kvadrerar båda sidorna av ekvationen får vi $\frac{a^2}{b^2} = 2$. Då följer det att $a^2 = 2b^2$ vilket innebär att a^2 måste vara ett jämnt tal, och då måste a vara ett jämnt tal (varför?). Låt $a = 2k$, då får vi $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$. Dividerar vi båda sidor med 2 får vi $2k^2 = b^2$, vilket innebär att även b^2 måste vara ett jämnt tal, och då också b. Detta är en motsägelse eftersom vi antog att $\frac{a}{b}$ var maximalt förkortat. Därmed är $\sqrt{2}$ inte ett rationellt tal.

Avsnitt 1.7

1. $(2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$
2. $2i \cdot (2 - 2i) = 4 + 4i$
3. $(1 + 2i)(2 - \frac{i}{4}) = \frac{5}{2} + \frac{15}{4}i$
4. $(3 - 2i)(4 + i - (6 - 2i)) = 13i$
5. Vi har
$$z + w = 3 - \frac{i}{2}, \quad z - w = 1 + \frac{3i}{2}, \quad z \cdot w = \frac{5}{2} - \frac{3i}{2}, \quad \frac{z}{w} = \frac{3}{4} + \frac{5i}{4}.$$



6. $i^{10} = -1$, $i^{11} = -i$, $i^{12} = 1$ och $i^{1024} = 1$.

7. $\text{Re}(z) = -2$, $\text{Im}(z) = 2$.

8. Vi börjar med att leta efter ett mönster genom att undersöka de första termerna i sekvensen. Vi har att $z_1 = 0$, $z_2 = 0^2 + i = i$, $z_3 = i^2 + i = -1 + i$, $z_4 = (-1+i)^2 + i = -i$, $z_5 = (-i)^2 + i = -1 + i = z_3$. Om vi fortsätter så ser vi att det finns ett mönster‖ där om n är jämnt är $z_n = i$ men om n är udda är $z_n = -1 + i$, för $n > 2$. Då kan vi dra slutsatsen att $z_{111} = -1 + i$ och därav blir avståndet från origo $|-1+i| = \sqrt{2}$.

Avsnitt 1.8

1. $1002 \cdot 998 = (1000 + 2)(1000 - 2) = 1000^2 - 2^2 = 999996$.

2. (a) x
   (b) $\frac{x-y}{x+y}$
   (c) $-5 - x$
   (d) $\frac{x+2y}{x-2y}$

3. Vi vet att $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ och $|3 + 4i|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

4. Förläng bråket med nämnarens konjugat. Vi får

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{-3}{13}i.$$

5. $\frac{4+i}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{5i}{2}$

6. $\frac{4+6i}{2i} = 3 - 2i$

7. Vi har

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i), \quad x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy).$$

8. (a) Sant
   (b) Falskt
   (c) Sant
   (d) Sant
   (e) Sant

‖Som man bör bevisa!

Kapitel 2

Avsnitt 2.1

1. Ja, polynom är uttryck på formen $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. I detta fall är $a_0 = 3$ och $a_i = 0$ för alla $i \geq 1$.
2. (a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (b) $x = 1, x = -\frac{5}{3}$
   (c) $x = 3, x = -4$
3. (a) 1, nämligen $x = -\frac{2}{3}$.
   (b) 2, nämligen $x = -1$ och $x = 3$.
   (c) 0, detta polynom har enbart komplexa rötter.
4. c, a, b, d, e (med respektive grader: 5, 3, 2, 0, $-\infty$)
5. (a) $x = 1, x = -5$
   (b) $x = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$
   (c) $x = \frac{5\pm 7i}{2}$
6. (a) $a > -1/4$
   (b) $a > -49/60$
7. Polynomet har rötterna $z = 0$, $z = i$ och $z = -i$. Eftersom alla reella tal är komplexa tal så kan ett polynom aldrig ha fler reella än komplexa rötter.
8. Börja med att sätta $x = iy$, då fås $p(iy) = 4i(iy)^3 - 12(iy)^2 + 5i(iy) - 15 = 4y^3 + 12y^2 - 5y - 15$. Nu letar vi efter rötterna till $p(iy)$ för att sedan hitta rötterna till $p(x)$. Genom att använda oss av rationella rotsatsen får vi fram att $y = -3$ är en rot. Vi utför polynomdivision med $(y+3)$ och får att $p(iy) = (y+3)(4y^2 - 5)$. Nu löser vi $4y^2 - 5 = 0$ och får rötterna $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Nu har vi rötterna till $p(iy)$, men det är rötterna till $p(x)$ vi är ute efter. Eftersom $x = iy$ ser vi att rötterna är $x = -3i$ och $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$.
9. Kvadratkomplettera!

Avsnitt 2.2

1. (a) Kvot: $x + 2$, rest: 3.
   (b) Kvot: $3x + 2$, rest: $-14x + 1$.
   (c) Kvot: $3x^2 + 11x + 31$, rest: $105x + 38$.
   (d) Kvot: $x + 1$, rest: 0.
   (e) Kvot: $x - 5$, rest: $17x^2 + 17x + 17$.
   (f) Kvot: 0, rest: x^5.
2. Sant eftersom $p(2) = 0$.
3. $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Rötterna är således -1, $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$.
4. Saknar heltalslösningar.
5. $k = -4$ med kvoten $x^2 - 2x + 8$ eller $k = 2$ med kvoten $x^2 - 2x + 2$.
6. $x = \frac{1}{2}$
7. $1, 2, 3, 4, 5$

8. Vi vet att $A(x) = k_1(x)q(x)$ och $B(x) = k_2(x)q(x)$ så $A(x) + B(x) = (k_1(x) + k_2(x))q(x)$. Alltså är summan jämnt delbar med $q(x)$ också.

9. (a) Kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln som $(x-2)(x+2)$, och har rötterna $x = \pm 2$.
   (b) Kvadreringsreglerna ger faktoriseringen $(x-3)^2$, och polynomet har alltså dubbelroten $x = 3$.
   (c) Faktorisera först ut x så att vi får $x(x^2 + 4x + 4)$, sedan använder vi kvadreringsregeln och får $x(x+2)^2$. Här kan vi avläsa att rötterna är $x = 0$ och $x = -2$.

10. Då x är en faktor i båda termerna får vi $x^2 + ix = x(x+i)$, som vi kan se har rötterna $x = 0$ och $x = -i$.

11. Om 2 och 5 är rötter till polynomet kan vi skriva polynomet som $k(x-2)(x-5)$ enligt faktorsatsen, där k är en konstant. Men vi vet att koefficienten framför x^2 ska vara 1, så vi måste ha att $k = 1$. Om vi multiplicerar ihop parenteserna får vi $x^2 - 7x + 10$, och om vi jämför med $x^2 + ax + b$ så kan vi läsa av att $a = -7$ och $b = 10$.

Avsnitt 2.3

1. $a = 8/7$ och $b = 2/7$.

2. $x = -1/2$ och $y = 11/2$.

3. $a = 17/4$ och $b = 3/4$.

4. Om $x + 2y = 5$ kan vi multiplicera båda led med 3 och få $3x + 6y = 15$. Detta kan inte vara sant samtidigt som den andra givna ekvationen $(3x + 6y = 14)$ gäller. Alltså saknar systemet lösning.

5. Vi har att eftersom $p(-x) = -p(x)$ att $p(-2) = -p(2)$. Därmed följer det att resten då vi dividerar med $(x+2)$ är -4. Vi kan nu skriva $p(x) = (x^2-4)q(x) + r(x)$, där $r(x) = ax + b$ för några konstanter a, b. Vi har att $p(2) = 4 = (4-4)q(2) + r(2) = 2a + b$ och $p(-2) = -4 = (4-4)q(-2) + r(-2) = -2a + b$. Vi får då ett ekvationssystem, $2a + b = 4$ och $-2a + b = -4$. Detta har lösningen $b = 0$ och $a = 2$. Alltså är resten $r(x) = 2x$.

Avsnitt 2.4

1. $7! = 5040$

2. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

3. $\binom{9}{3} = 84$.

4. $\binom{7}{3} = 35$ och $\binom{12}{10} = 66$.

5. Koefficienten framför x^9 är noll och koefficienten framför x^{10} är $\binom{30}{4}$.

6. Summan blir $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$. Sambandet är att summan i rad i är 2^{i-1}.

7. Ledning: Välj $x = y = 1$ i binomialsatsen.

8. Vi delar upp i fyra olika fall.

Fall 1. Mästerloppan är levande kanonkula. I sådana fall finns det 5 loppor som kan vara jonglörer och 6 st som kan vara clowner. Det finns då $\binom{5}{2}$ sätt att välja 2 jonglörer på. För clownerna kan du välja detta på $\binom{6}{4}$ sätt. I detta fall finns det alltså: $\binom{5}{2}\binom{6}{4} = 150$ sätt att välja artister för din cirkus.

Fall 2. Mästerloppan är jonglör. I sådana fall finns det 5 loppor som kan agera levande kanonkula och du kan välja en av dessa på 5 sätt. Efter detta har du då 4 som kan agera jonglörer, och du behöver ytterligare en, så 4 olika sätt att välja detta på. Slutligen väljer vi av 6 möjliga clowner 4 stycken. Så vi har $4 \cdot 5 \cdot \binom{6}{4} = 300$.

Fall 3. Mästerloppan är clown. I sådana fall finns det $\binom{5}{1} = 5$ sätt att välja en levande kanonkula på, och sedan $\binom{4}{2} = 6$ sätt att välja 2 jonglörer på. Slutligen, finns det $\binom{6}{3} = 20$ sätt att välja 3 clowner på. Det blir totalt $6 \cdot 5 \cdot 20 = 600$ olika uppsättningar.

Fall 4. Mästerloppan uppträder inte - sin celebritet till trots. Det finns då $\binom{5}{1} = 5$ sätt att välja kanonkula på, $\binom{4}{2} = 6$ sätt att välja jonglörer på efter du valt kanonkula och slutligen $\binom{6}{4} = 15$ sätt att välja clown på. Sammanlagt blir det $6 \cdot 5 \cdot 15 = 450$ olika uppsättningar.

Nu summerar vi detta och får att det finns totalt $150 + 300 + 600 + 450 = 1500$ olika uppsättningar.

9. (a) Det räcker att bestämma hur många följder av längd 3 det finns. De resterande siffrorna bestäms ju av de tre första. En siffra kan väljas på 10 olika sätt, enligt multiplikationsprincipen får vi då $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ möjliga palindrom av längd 6.

   (b) Den första och sista siffran ska vara lika, denna kan vi välja på 10 olika sätt. Den andra och näst sista siffran ska vara lika, denna kan vi också välja på 10 olika sätt. Till sist måste vi välja mittensiffran och detta kan göras på 10 olika sätt. Det resulterar enligt multiplikationsprincipen i $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ möjliga palindrom av längd 5.

10. (a) Valet av tröja, byxor och hatt är oberoende. Enligt multiplikationsprincipen får vi då sammanlagt $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ olika kombinationer.

   (b) Jonas har redan bestämt sig för att ha svarta byxor och en gul tröja. Det som är kvar är att välja en hatt. Det finns 5 olika slags hattar, alltså kan han välja sina kläder på 5 olika sätt.

   (c) Totalt finns det 30 olika sätt att välja mellan de olika kläderna enligt (a). Enligt (b) finns det 5 olika sätt att göra det förbjudna”valet, dvs. kombinera svarta byxor med en gul tröja. Vi kan subtrahera dessa förbjudna val från det totala antalet kombinationer och får $30 - 5 = 25$ kombinationer.

11. Vi använder oss av någonting som kallas principen för inklusion-exklusion. Vi börjar med att räkna hur många sätt det totalt finns att bära dessa kassar på. Vi ser då att det för varje kasse finns fyra händer att välja på, så detta ger 4^7 sätt. I detta fall har vi helt klart räknat med för mycket—vi vill ju att ingen hand skall vara tom.

    Vi försöker subtrahera antalet sätt som vi kan distribuera kassar om en hand får vara tomhänt. Ordna händerna så att du kan tala om den första, resp. andra, tredje och fjärde handen. Om den första handen är tom finns det 3^7 sätt at distribuera kassarna på, samma med den andra, tredje och fjärde handen. Så om vi betraktar $4^7 - 4 \cdot 3^7$ kan vi frestas att tro att detta är antalet sätt att distribuera våra kassar på så att ingen hand är tom. Men tänk om både den första handen och den andra handen är tomhänta? Vi subtraherade ju dessa två gånger, en gång i det första scenariot då hand nummer 1 var tom, och en annan gång då hand nummer 2 var tom. Alltså har vi subtraherat en gång för mycket. På liknande sätt, att hand nummer 2 och 3 är tomma har vi subtraherat bort 2 gånger, och samma för de andra händerna.

    Vi försöker därmed lägga till dessa. Först väljer vi två händer som får vara tomma på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Det finns då 2^7 sätt att distribuera ut kassarna, om dessa två skall vara tomma. Så om vi adderar till det: $4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7$, är vi då färdiga? Nej. För tänk om hand 1, 2 och 3 är tomma! I detta fall så har vi räknat med det en gång i 4^7, tre gånger i $4 \cdot 3^7$ (då hand 1 ,2 eller 3 är tom), och tre gånger i $6 \cdot 2^7$ (då hand 1 och 2, eller hand 2 och 3, eller hand 1 och 3 är tomma). Sammanlagt har vi alltså räknat med detta $1 - 3 + 3 = 1$ gånger.

Men vi vill ju inte räkna med detta *någon* gång. Alltså måste vi subtrahera i de fall då detta inträffar.

Antalet sätt som 3 händer kan vara tomma på är $\binom{4}{3} = 4$. Det finns då 1 sätt att dela ut resten av kassarna på, ge det till den stackars handen som kvarstår. Alltså totalt 4 sätt som 3 händer kan vara tomma på och kassarna kan distribueras. Nu har vi alltså $4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 = 8400$ sätt. Detta är det slutliga resultatet.

12. Eftersom D vill sitta bredvid A och A vill sitta bredvid antingen B eller C, så måste A sitta mellan D och antingen B eller C. Vi får alltså två kombinationer av godkända lärare bredvid A, och beroende på ordning kan dessa två fall delas in i vardera två delfall. Vi får alltså de fyra kombinationerna $\{DAC, CAD, DAB, BAD\}$.

    Sedan placerar vi ut den av B och C som inte redan satt sig, vilket går att göra på ett enda sätt för vart och ett av våra fall; bredvid sin kompis. Vi får ordningarna

    $$\{DACB, BCAD, DABC, CBAD\}.$$

    Slutligen placerar vi ut person E, vilket går på endera av ändarna för varje fall, alltså 2 sätt per fall. Vi får då $2 \cdot 4 = 8$ sätt.

Avsnitt 2.5

1. (a) $\{1, 2, 4, 5, 6, 10, 100, 101\}$
   (b) $\{2, 6, 10\}$
   (c) $\{1, 4, 100\}$

2. Ja. Varje rationellt tal kan skrivas på formen a/b, där a och b är heltal och där b är nollskilt.

3. Detta är alla jämna tal mellan 2 och 198. Det är 99 sådana tal.

4. $\{10^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

5. Detta är alla primtal samt talen 0 och 1. Det är ju precis dessa som är de naturliga tal som inte är en produkt av två heltal som båda är större än 1.

Avsnitt 2.6

1. (a) Ja, alla tal större än 1 är också större än 0.
   (b) Nej, x kan vara ett tal som är större än 0, men mindre än 1, t.ex. $\frac{1}{2}$.
   (c) Ja, det enda icke-negativa talet vars kvadrat är 1, är talet 1.
   (d) Ja, produkten av två tal som är positiva eller noll garanterar att produkten av dem också är positiv eller noll.
   (e) Ja, liknande resonemang som ovan.

Kapitel 3

Avsnitt 3.1

1. Värdemängden är $\{a, b\}$ och funktionen är inte injektiv eftersom det finns två element som avbildas på a.

2. Funktionen f är både surjektiv och injektiv. Varje heltal träffas, och det träffas av exakt ett tal. Funktionen g är injektiv, men den är inte surjektiv—det finns inget naturligt tal a så att $g(a) = 0$.

3. Funktionen f är både injektiv och surjektiv, eftersom varje element i $\mathbb{Z}$ ”träffas” precis en gång.

4. $g(a) = a^2$. Funktionen g är inte injektiv, till exempel är $g(-1) = g(1)$. Funktionen är inte heller surjektiv, till exempel finns inget a så att $g(a) = -1$.

5. (a) Definitionsmängden för h är $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (b) Alla element i målmängden $\{a, b, c\}$ måste "träffas" för att h ska vara surjektiv, så vi kan till exempel låta $h(1) = a, h(2) = b, h(3) = c, h(4) = a, h(5) = b$.

   (c) Alla element i målmängden får inte "träffas", så vi kan till exempel låta $h(1) = h(2) = h(3) = h(4) = h(5) = a$.

   (d) Nej, det är "för få" element i målmängden. Om exempelvis $h(1) = a, h(2) = b, h(3) = c$ så finns inga fler unika element vi kan ge $h(4)$ och $h(5)$.

6. $\alpha = c$, $\beta = 2$

7. (a) Tillåtet

   (b) Tillåtet

   (c) Ej tillåtet

   (d) Tillåtet

8. (a) För att man ska kunna definiera en sammansatt funktion måste den inre funktionens målmängd vara lika med den yttre funktionens definitionsmängd. Enligt uppgiften är g:s definitionsmängd lika med f:s målmängd. Alltså kan vi bilda $g(f(a))$. Däremot går det inte att definiera $f(g(a))$ eftersom g:s målmängd inte överensstämmer med f:s definitionsmängd.

   (b) Enligt uppgiften är f:s målmängd lika med $\mathbb{R}$. Därför måste $f(n)$ vara reellt för varje n i f:s definitionsmängd. Därmed kan vi inte ha att $f(n) = 2 + 3i$. Däremot ligger 2π i f:s målmängd, så det är möjligt för oss att definiera f så att $f(n) = 2\pi$ för något $n \in \mathbb{N}$.

9. $f(g(x)) = g(x) + 2 = 2x + 2$ och $g(f(x)) = 2f(x) = 2x + 4$.

10. (a) Eftersom $f(3) = 15$, $f(5) = 25$, $f(6) = 30$ och $f(7) = 35$ så är värdemängden lika med $\{15, 25, 30, 35\}$. Funktionen $f(x)$ är injektiv eftersom alla värden avbildas på skilda värden, men inte surjektiv eftersom värdemängden bara är en delmängd av målmängden $\mathbb{R}$.

    (b) Värdemängden är alla reella tal eftersom det för varje reellt tal b finns ett reellt tal a sådant att $f(a) = b$. Detta medför att f är surjektiv. $f(x)$ är även injektiv eftersom $f(a) = f(b)$ medför att $5b = 5a$ eller $a = b$.

    (c) Med samma resonemang som i (b) ser vi att värdemängden är $\mathbb{R}$ och att $f(x)$ är injektiv. Däremot är f inte surjektiv eftersom målmängden $\mathbb{C}$ innehåller värden som inte finns i värdemängden $\mathbb{R}$.

    (d) Värdemängden kan skrivas som $5x \mid x \in \mathbb{Z}$. Lite eftertanke visar oss att värdemängden består av alla tal som är delbara med 5. Funktionen $f(x)$ är ej surjektiv eftersom inte alla heltal är delbara med 5, men den är injektiv med samma resonemang som i (b).

11. (a) Ej surjektiv då inga negativa tal antas. Funktionen är inte heller injektiv då exempelvis $f(-1) = f(1) = 1$.

    (b) Funktionen är inte surjektiv då exempelvis 0 inte ligger i värdemängden. Däremot är funktionen injektiv. Antag att $g(a) = g(b)$, då följer $-a - 3 = -b - 3$ vilket innebär att $a = b$.

    (c) Alla reella värden antas inte av funktionen så den är ej surjektiv. Med liknande argument som i (b) kan vi visa att den är injektiv.

(d) Vi har att $r(x) = f(g(x)) = (-x-3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Funktionen är ej surjektiv då den bara kan anta värden över 9 (eftersom definitionsmängden är $\mathbb{R}_+$). Funktionen är strikt ökande på sin definitionsmängd vilket medför att den är injektiv —notera att detta inte hade varit fallet om definitionsmängden hade varit hela $\mathbb{R}$.

(e) Vi har $s(x) = f(h(x)) = (-\sqrt{x})^2 = |x| = x$. Vi kan ta bort absolutbeloppet eftersom definitionsmängden är $\mathbb{R}_+$. Om vi antar att $s(a) = s(b)$ så betyder det att $a = b$ så funktionen är injektiv.

12. Att skapa en funktion till de naturliga talen kan ses som ett sätt att skapa en sekvens av elementen i definitionsmängden. I vårt fall kan vi skapa sekvensen ett, minus ett, två, minus två och så vidare, och låta position ”noll” i sekvensen tas av noll. Vårt s:te element i sekvensen blir alltså $-s/2$ om s är jämnt och $(s+1)/2$ om s är udda.

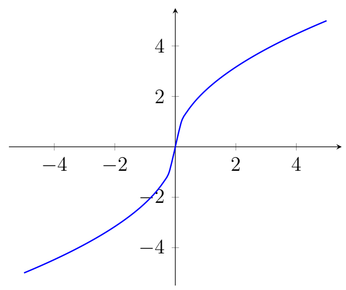
    Om vi vänder på det och ordnar ett tal n hamnar det på plats $2n-1$ i sekvensen om n är positivt, och $-2n$ om n är negativt. Skapa alltså funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ så att

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1 \text{ om } n > 0 \\ -2n \text{ om } n < 0 \\ 0 \text{ om } n = 0. \end{cases}$$

    Det är uppenbart att funktionen är både injektiv och surjektiv då vi har skapat funktionen genom att definiera en sekvens.

Avsnitt 3.2

1. Från vänster: (a) Inte injektiv, (b) inte surjektiv, (c) varken injektiv eller surjektiv, (d) inverterbar, se nedan.



Avsnitt 3.3

1. (a) Sätt $f(x) = 1 - x$. Då blir mängden av alla punkter (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$ lika med grafen till $f(x)$.

   (b) Eftersom både $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ och att $f(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$. Men då är inte f någon funktion och alltså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.

   (c) Eftersom både $(1, 1)$ och $(1, -1)$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1) = 1$ och att $f(1) = -1$. Men då är inte f någon funktion och alltså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.

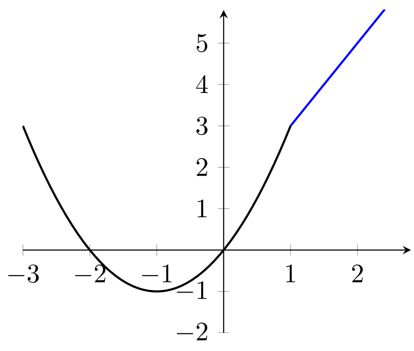
2. Dessa grafer ska ritas: $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = x^2 + 1$ och $y = (-x)^2 (= x^2)$.

3. Se Figur 62.

4. $f^{-1}(x) = x/2$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

5. $f^{-1}(x) = (x-5)/3$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

6. $y = x/2 + 11/2$.



Figur 62: Grafen till $f(x) = x^2 + 2x$ då $x \leq 1$ och $2x + 1$ då $x > 1$.

7. $y = 10x/9 + 25/3$.
8. (a) $x = 3$
   (b) $x = 1$
9. 6.
10. $\lambda = \ln(2)/T$.
11. (a) $x = -1$
    (b) $t = 1$
    (c) saknar lösning.
12. (a) $x = 4$
    (b) $-\frac{1}{2}$
    (c) $x_1 = 2, x_2 = 5$.
13. $65/24$
14. Genom att sätta $x = -1$ får vi ekvationen $y^2 = -1 + 4 - 1 = 2$, vilket ger att $(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2})$ är punkter på kurvan. Genom att sätta $x = 3$ får vi ekvationen $y^2 = 27 - 12 - 1 = 14$, vilket ger att $(3, \sqrt{14})$, $(3, -\sqrt{14}$ är punkter på kurvan.

Avsnitt 3.4

1. (a) $x > -7$
   (b) $x < -3$ eller $x > 1$
   (c) $x \geq 2$ eller $x = -2$.
2. Skärningspunkterna är $(-3/2 - \sqrt{21}/2, 4 + \sqrt{21})$ och $(-3/2 + \sqrt{21}/2, 4 - \sqrt{21})$. För $x < -3/2 - \sqrt{21}/2$ eller $x > -3/2 + \sqrt{21}/2$ gäller att $f(x) > g(x)$.
3. $x = 9/4$.
4. Finns inga lösningar.
5. $x = 2$ och $x = 6$.
6. Lösningarna är följande:
   (a) $x_1 = 1$ och $x_3 = -1$
   (b) Lösning saknas.
   (c) $x = 2$

(d) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$

(e) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ och $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(f) $x = 1$

(g) $x_1 = -1$ och $x_2 = -3$

(h) $x_1 = \frac{7-\sqrt{6}}{2}$ och $x_2 = \frac{1}{2}$

Avsnitt 3.5

1. I en rätvinklig triangel är de två spetsiga vinklarna v och $90° - v$. Sidan som är närliggande till vinkeln v är motstående till vinkeln $90° - v$, och sidan som är motstående till v är närliggande till $90° - v$. Med definitionerna av sinus och cosinus följer därför $\sin(90° - v) = \cos(v)$ och $\cos(90° - v) = \sin(v)$.

2. Vi har att

$$\text{(a): } \sin(-30°) = -\frac{1}{2}, \quad \text{(b): } \sin(420°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{(c): } \cos(-720°) = 1.$$

3. I grader: $v = \pm 45° + n \cdot 360°$, samt $v = \pm 135° + n \cdot 360°$, där $n \in \mathbb{Z}$. I radianer: $v = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ och $v = \pm\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, där $n \in \mathbb{Z}$. Detta kan kort skrivas som $v = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, där $n \in \mathbb{Z}$.

4. Vi har att

$$\text{(a): } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{(b): } \sin\frac{23\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{(c): } \cos\frac{51\pi}{6} = 0.$$

5. Vi vill lösa $\sin(x) = \pm\sqrt{3}/2$. Lösningarna ges av

$$\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \text{ samt } \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$

6. Funktionen $f(x) = 2 + 3\sin(\pi x/2)$ har värdemängden $V_f = [-1, 5]$. Vi vet att uttrycket $\sin(\pi x/2)$ antar alla möjliga värden i intervallet $[-1, 1]$ då x varierar över de reella talen. (Funktionen antar definitivt värdena -1 och 1, och eftersom sinus-funktionen är kontinuerlig antas även alla värden där emellan).

   Minsta värde som $f(x)$ kan anta är då $2 - 3 = -1$, och största värdet är $2 + 3 = 5$. Eftersom f också är kontinuerlig, så antas alla värden i hela intervallet $[-1, 5]$, så detta är funktionens värdemängd.

7. Talen på polär form är

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$
$$3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{-i}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Avsnitt 3.7

1. Svaret är 1. Använd att $\cos(0) = 1$ och $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ då $x \to 0$.

2. $5x^4 + 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 6x$

3. $2\cos(2x) - 2\sin(2x)$

4. 0, vilket följer direkt från sambandet $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

5. (a) 2

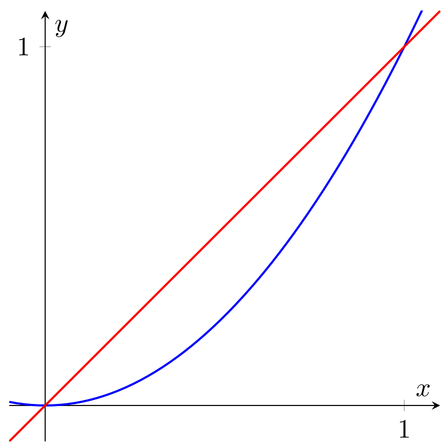
   (b) 1

   (c) $5 \cdot 4^{10} (= 20 \cdot 4^9)$

6. (a) Minimum i 10, funktionsvärde -110, maximum i -1, funktionsvärde 11.
   (b) Minimum i 2, funktionsvärde -4, maximum i -10, funktionsvärde 152.
7. Tangentens ekvation är $y = 23x - 31$.
8. $(1, 10)$ är lokalt maximum och $(4, -17)$ är lokalt minimum.
9. $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ och $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$.
10. Rita grafen. Notera sedan att det är ett hopp från -1 till 1 vid punkten $x = 0$. Detta betyder att funktionen ej är kontinuerlig i punkten $x = 0$ och därmed inte deriverbar där.

Avsnitt 3.8

1. (a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$
   (b) $\ln(|x|) - \frac{1}{x} + C$
   (c) $\frac{e^{3x}}{3} + C$
   (d) $\frac{2x^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x} + C$
   (e) $\frac{e^{ax+b}}{a} + C$
2. (a) $\frac{10}{3}$
   (b) $-1 + \frac{1}{e^2} + 2e$
   (c) $\frac{16\sqrt{2}-2}{7}$.
3. För att ta reda på när kurvorna skär varandra sätter vi $x = x^2$, vilket uppfylls av $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$. Då x ligger mellan 0 och 1 så ligger kurvan $y = x$ ovanför kurvan $y = x^2$, se Figur 63. Alltså ska vi beräkna arean $A = I_1 - I_2$, där



Figur 63: Kurvan $y = x^2$ och linjen $y = x$.

$$I_1 = \int_0^1 x \ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad I_2 = \int_0^1 x^2 \ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

vilket ger

$$A = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

4. Vi har att $\int_{-5}^{5} |x-2| \, dx = 29$. Dela upp integralen på två intervall—ett där $|x-2| = x-2$ och ett där $|x-2| = -(x-2)$.

Sakregister